UNIVERZITA KARLOVA
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

PŘECHOD MEZI SLOVNÍM A ALGEBRAICKÝM VYJÁDŘENÍM ŽÁKOVSKÉ STRATEGIE A OBTÍŽE

Diplomová práce

AUTOR PRÁCE: Bc. Anežka Novotná
VEDOUCÍ PRÁCE: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

PRAHA 2014

CHARLES UNIVERSITY
FACULTY OF EDUCATION
Department of Mathematics and Mathematical Education

TRANSFER BETWEEN VERBAL AND ALGEBRAIC DESCRIPTIONS PUPILS' STRATEGIES AND PROBLEMS

Diploma Work

AUTHOR: Bc. Anežka Novotná
SUPERVISOR: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

PRAGUE 2014

Prohlášení:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně, veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne 20. 6. 2014

Anežka Novotná

Poděkování:

Děkuji své vedoucí práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za vstřícný přístup a cenné rady. A dále děkuji své rodině za podporu a trpělivost.

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je získat vhled do problémů, které mají žáci při přechodu mezi slovním a algebraickým vyjádřením, prostřednictvím analýzy jejich řešitelských procesů. Práce je rozdělena na teoretickou a experimentální část.

Teoretická část práce obsahuje tři celky. První je věnován analýze tří vybraných řad českých učebnic pro základní školy z hlediska výuky pojmu proměnná a algebraických výrazů. Další celek se zabývá mezinárodním srovnávacím výzkumem TIMSS a úspěšností českých žáků 8. ročníků v oblasti Algebra. V třetím celku jsou popsány výsledky zahraničních výzkumů týkajících se problematiky přechodu mezi slovním a algebraickým vyjádřením.

Jádrem práce je experimentální část, jejímž cílem bylo popsat obtíže, s nimiž se žáci v dané oblasti potýkají, a identifikovat jejich pravděpodobné zdroje. Podkladem pro vlastní výzkum byla sada 9 úloh vycházejících z uvolněných úloh výzkumů TIMSS. Cílovou skupinou byli žáci 9. ročníku základní školy, s nimiž bylo provedeno šetření metodou rozhovoru nad řešením úloh. Nejprve byla provedena pilotní studie na vzorku 3 žáků, během které byla prověřena sada testovacích úloh. Hlavní studie se zúčastnilo 8 žáků. Rozhovory byly nahrávány a posléze kvalitativně zpracovány po jednotlivých úlohách. Analýza každé úlohy končí shrnutím jevů, které se v jejím řešení u žáků nejčastěji objevovaly. Identifikované jevy jsou pak shrnuty v tabulce v závěru kapitoly.

Klíčová slova: algebra, výraz, proměnná, TIMSS, analýza učebnic

Abstract

The aim of this thesis is to gain insight into the problems that pupils have when switching between verbal and algebraic expressions, through the analysis of their problem-solving processes. The work is divided into theoretical and experimental parts.

The theoretical part of the paper contains three sections. The first describes the analysis of three selected Czech textbooks series for primary schools in terms of teaching the concept of variables and algebraic expressions. The next section deals with international comparative research TIMSS and the success of Czech pupils of year 8 in algebra. In the third section, results of international research concerning the issue of transition between verbal and algebraic expressions are described.

The main part of the work is the experimental part, it aims to describe the difficulties encountered by pupils in algebra and to identify their likely sources. The basis for the own research was a set of 9 problems based on released TIMSS problems. The target group of pupils was year 9 of primary school, with whom the investigation was carried out via think-aloud interviews. First, a pilot study was conducted on a sample of 3 pupils, during which a set of test problems was checked. The main study involved 8 pupils. The think-aloud interviews were recorded and later qualitatively evaluated problem by problem. The analysis of each problem contains a summary of the most common issues that appeared during the testing. Identified issues are summarized in the table at the end of the chapter.

Keywords: algebra, expression, variable, TIMSS, textbook analysis

Obsah

1 Úvod

Dovednost pracovat s algebraickými výrazy je zcela nepostradatelná při řešení mnoha matematických úloh, v teoretických úvahách i pro použití matematiky v praxi. Bohužel výzkumy ukazují (viz oddíl 2.2), a mé osobní zkušenosti z pedagogických praxí i z hodin doučování to potvrzují, že dnešní žáci základních škol mají velké problémy právě s uchopením těch částí matematiky, které se výukou proměnné zabývají. Proto jsem se rozhodla tomuto tématu více věnovat.

Cílem mé diplomové práce je získat vhled do problémů, které mají žáci při přechodu mezi slovním a algebraickým vyjádřením. Prostředky k dosažení tohoto cíle vyplynuly z formulace dílčích cílů:

- provést analýzu tří řad učebnic z hlediska výuky pojmu proměnná a algebraických výrazů;
- seznámit se se závěry zahraničních výzkumů týkajících se dané problematiky;
- analyzovat úspěšnost žáků v úlohách z algebry v mezinárodním srovnávacím výzkumu TIMSS;
- uskutečnit vlastní výzkum metodou rozhovorů se žáky nad řešením úloh podobného typu jako v TIMSS z oblasti Algebra;
- identifikovat potíže, které žáci s řešením úloh tohoto typu mají;
- shrnout žákovské obtíže a navrhnout didaktická doporučení.

Oddíl 2.1 diplomové práce je věnován analýze tří vybraných řad učebnic matematiky pro základní školy z hlediska výuky pojmu proměnná a algebraických výrazů. První analyzovanou řadou učebnic jsou učebnice vydané nakladatelstvím Fraus, které jsou propagované zejména v souvislosti s kurikulární reformou. Jako druhou řadu učebnic jsem zvolila učebnice z nakladatelství Prometheus od autorů Odvárko a Kadleček. Tato řada učebnic je na českých základních školách hojně využívaná, mimo jiné ji k výuce používá i škola, kde jsem uskutečnila výzkum popsaný v experimentální části práce. Dále byla analyzována řada učebnic z nakladatelství Nová škola, která je založena na činnostním učení.

Oddíl 2.2 se zabývá mezinárodním srovnávacím výzkumem TIMSS a úspěšností českých žáků 8. ročníků v oblasti Algebra z TIMSS 2007. Konkrétní údaje a data jsou čerpána z (Tomášek, 2008) a (Tomášek, 2009).

V oddílu 2.3 jsou shrnuty výsledky tří zahraničních výzkumů, které zkoumaly tuto problematiku:

- vzdělávací účinky konstruktivistického a instruktivistického přístupu na integraci aritmetických a algebraických schémat u žáků, kteří se s algebrou ještě nesetkali;
- znaky ovlivňující u žáků pochopení algebraických výrazů;
- porozumění žáků (ve věku 11-15 let) algebraickému zápisu.

Jádrem práce je experimentální část, jejímž cílem bylo popsat obtíže, s nimiž se žáci v dané oblasti potýkají. Podkladem pro vlastní výzkum byla sada 9 úloh vycházejících z uvolněných úloh výzkumů

TIMSS. Cílovou skupinou byli žáci 9. ročníku základní školy, s nimiž bylo provedeno šetření metodou rozhovoru nad řešením úloh.

Výzkum byl uskutečněn ve dvou fázích. První fáze – pilotní studie – je popsána v oddílu 3.1, který kromě metodologie obsahuje i rozbor jednotlivých úloh a doporučení k jejich úpravě pro potřeby hlavní studie. Na něj pak navazuje oddíl 3.2 s hlavní studií. Zde jsou po jednotlivých úlohách kvalitativně zpracována všechna zajímavá žákovská řešení. Analýza každé úlohy končí shrnutím jevů, které se v jejím řešení u žáků nejčastěji objevovaly. Identifikované jevy jsou pak uvedeny v tabulce v oddílu 3.3.

Závěr v kapitole 4 shrnuje zjištěné poznatky z teoretické i praktické části práce a snaží se vyvodit didaktická doporučení ke konkrétním typům chyb a obtíží, které z experimentální části vyplynuly.

Za seznamem literatury (kapitola 0) jsou v příloze uvedena zadání testů pro pilotní studii i upravená verze pro hlavní studii. Dále je zde jako ukázka přidán přepis rozhovoru s jedním z žáků, kteří se výzkumu zúčastnili.

2 Teoretická část

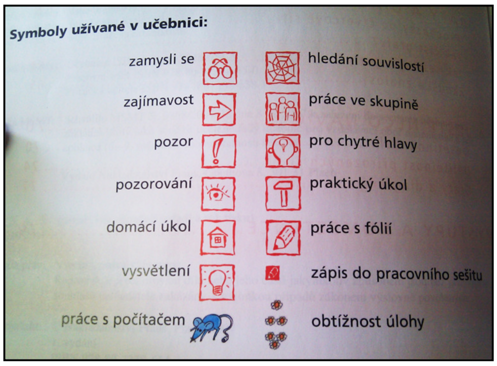
Tato práce začíná analýzou tří řad učebnic pro základní školy. Dále zmiňuje výsledky českých žáků v mezinárodním testování TIMSS. A nakonec jsou popsány tři relevantní zahraniční výzkumy.

2.1 Analýza učebnic

Tento oddíl se věnuje třem vybraným řadám učebnic matematiky pro základní školy. Text se především zaměřuje na to, kde a v jaké souvislosti se vyskytují písmena představující proměnné či neznámé. Podrobněji se pak v jednotlivých řadách učebnic věnuji kapitolám o výrazech a zaměřila jsem se i na způsob, jakým je toto učivo žákům předkládáno. Učebnice jsou analyzovány postupně podle ročníků, pro něž jsou určené. Oddíl 2.1.1 se věnuje řadě učebnic autorů Binterová, Fuchs, Tlustý z nakladatelství Fraus. Oddíl 2.1.2 analyzuje řadu učebnic autorů Odvárko, Kadleček vydané nakladatelstvím Prometheus. Oddíl 2.1.3 obsahuje řadu učebnic autorů Rosecká a kol. z nakladatelství Nová škola.

2.1.1 Řada učebnic z nakladatelství Fraus

Učebnice z nakladatelství Fraus jsou barevné, plné ilustračních i motivačních obrázků a snaží se i o přehlednost umístěním důležitých informací do barevných rámečků. Dále se v textu vyskytují symboly (viz obrázek 1), které upozorňují na určitý druh aktivity, zdůrazňují důležité pasáže nebo vybízejí k zamyšlení.



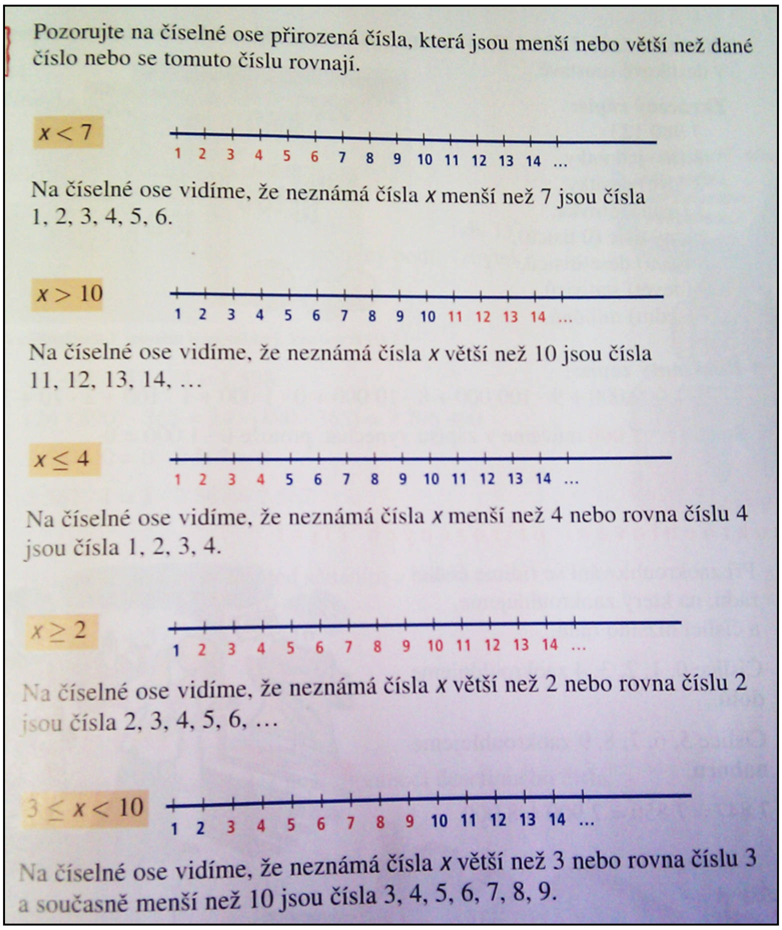
Obrázek 1

Zajímavé jsou také poznámky umístěné na okrajích stránek, které napomáhají žákům propojit poznatky získané v matematice s jinými předměty a především s reálným světem. Často mají formu otázek nebo úkolů, které se váží ke kontextu řešených úloh.

Matematika 6

Na začátku učebnice pro 6. ročník[1] je zařazen úvodní text pro motivaci k dalšímu učení aritmetiky a opakování znalostí z prvního stupně. Následují kapitoly *Desetinná čísla*, *Dělitelnost přirozených čísel*, *Grafy a diagramy* a v závěru je umístěna kapitola s názvem *A ještě něco navíc*, kam autoři zařadili další zajímavé úlohy týkající se probíraného učiva.

V této učebnici se žáci poprvé s proměnnou setkávají hned v úvodním opakování látky z prvního stupně[2], kde mají určit, která čísla jsou na číselné ose menší nebo větší než dané číslo (viz obrázek 2). Samotné vyskytující se proměnné není věnována pozornost, předpokládá se tedy, že žáci již mají s tímto typem zápisu zkušenosti a rozumějí mu.


Pozorujte na číselné ose přirozená čísla, která jsou menší nebo větší než dané číslo nebo se tomuto číslu rovnají.

$x < 7$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 …

Na číselné ose vidíme, že neznámá čísla x menší než 7 jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$x > 10$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 …

Na číselné ose vidíme, že neznámá čísla x větší než 10 jsou čísla 11, 12, 13, 14, …

$x \leq 4$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 …

Na číselné ose vidíme, že neznámá čísla x menší než 4 nebo rovna číslu 4 jsou čísla 1, 2, 3, 4.

$x \geq 2$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 …

Na číselné ose vidíme, že neznámá čísla x větší než 2 nebo rovna číslu 2 jsou čísla 2, 3, 4, 5, 6, …

$3 \leq x < 10$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 …

Na číselné ose vidíme, že neznámá čísla x větší než 3 nebo rovna číslu 3 a současně menší než 10 jsou čísla 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Obrázek 2

V kapitole *Desetinná čísla* je zařazena úloha[3], kde mají žáci vypočítat výměru bytu. Rozměry jsou zadány pomocí tabulky, která má v záhlaví uvedeno jako označení délek stran místností proměnné a, b. Žáci mají do tabulky doplnit výměru jednotlivých místností (obsah obdélníků) a pak určit celkovou výměru.

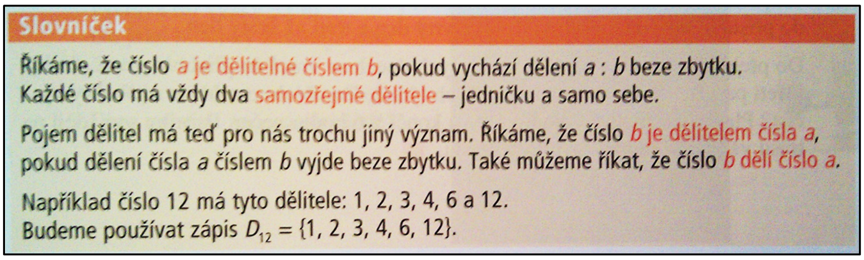
[1] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 80 s.

[2] Fraus 6, str. 11

[3] Fraus 6, str. 29

Uvedenými proměnnými autor úlohy žáky navádí k výpočtu obsahu obdélníku podle vzorečku $S = a \cdot b$, který žáci již pravděpodobně znají. Podobně se proměnná v záhlaví tabulky objevuje ještě v úloze na následující straně, kde žáci k výpočtu také potřebují vzorec pro výpočet obsahu obdélníku.

Bez dalších úvodů nebo příprav se najednou proměnné objeví v kapitole *Dělitelnost přirozených čísel*. Zde autoři po předchozích úlohách s konkrétními čísly uvedli do rámečku (viz obr. 3) definice pojmů dělitelnost, samozřejmý dělitel, dělitel a dělení číslem za pomoci proměnných[4].


Slovníček

Říkáme, že číslo *a* je dělitelné číslem *b*, pokud vychází dělení *a* : *b* beze zbytku.
Každé číslo má vždy dva samozřejmé dělitele – jedničku a samo sebe.

Pojem dělitel má teď pro nás trochu jiný význam. Říkáme, že číslo *b* je dělitelem čísla *a*, pokud dělení čísla *a* číslem *b* vyjde beze zbytku. Také můžeme říkat, že číslo *b* dělí číslo *a*.

Například číslo 12 má tyto dělitele: 1, 2, 3, 4, 6 a 12.
Budeme používat zápis $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Obrázek 3

O kousek dál je stejným způsobem definován pojem násobek. Dále se v rámečcích „slovníček“ autoři využití proměnných vyhýbají a věty a definice související s dělitelností opisují bez využití proměnných[5]. Proměnné figurují opět až v závěrečném shrnutí, kde se definice dělitele a násobku opakují.

V závěru kapitoly se vyskytují dvě úlohy, kde mají žáci doplňovat hodnoty do tabulky, která v záhlaví opět obsahuje proměnné[6].

V kapitole Grafy a diagramy se proměnné opět objevují v souvislosti popisu záhlaví tabulky[7] a v úlohách, kde mají žáci vyjádřit graf závislosti obsahu (čtverce, obdélníku) na délce jedné jeho strany.

Matematika 7

Učebnice pro 7. ročník nakladatelství Fraus[8] má stejné řazení jako předcházející díl. Začíná motivačním úvodem a opakováním znalostí z šestého ročníku. Následují kapitoly *Celá čísla*, *Zlomky*, *Poměr* a v závěru je ještě přidaná kapitola *A ještě něco navíc* s úlohami na procvičení učiva. Oproti předchozímu dílu učebnice obsahuje ještě dvoustranu s anglickým slovníčkem.

I v této učebnici se žáci setkávají s jistou formou reprezentace neznámé hned v úvodním opakování látky. Jedná se o úlohu s kouzelnou pyramidou[9], kde mají žáci do prázdných políček doplňovat čísla. Neznámá je prezentovaná právě prázdným čtverečkem.

---

[4] Fraus 6, str. 37
[5] Fraus 6, str. 40, 41
[6] Fraus 6, str. 56
[7] Fraus 6, str. 64, 65
[8] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008, 103 s.
[9] Fraus 7, str. 8

Proměnné se vyskytují zejména jako součást definic matematických pojmů a k popisu operací s celými čísly (dělitel a násobek[10], opačné číslo[11], vlastnosti sčítání[12] a násobení[13] celých čísel). Figurují logicky také v závěrečném shrnutí kapitoly *Celá čísla*.

Dále žáci s proměnnou pracují i v některých úlohách, ale takových úloh je v kapitole *Celá čísla* málo. S jednou takovou úlohou se setkávají při probírání pojmu opačné číslo, kde mají za úkol do tabulky doplnit opačná čísla k daným číslům, mezi nimiž se vyskytují i proměnné $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{z}$. Více zajímavých úloh, které se dotýkají výuky pojmu proměnná, následuje po shrnutí kapitoly *Celá čísla*. V první úloze mají žáci najít na číselné ose všechna celá čísla, která splňují určitou podmínku, zapsanou nerovností s proměnnou $\boldsymbol{x}$.[14] Zajímavější je úloha, kde se mají žáci vyjádřit, co mohou říci o celých číslech $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$, pro která platí uvedený vztah[15]. Potom se proměnná vyskytuje opět v úloze, kde mají žáci hledat opačné číslo[16]. Nově se však vyskytuje i v souvislosti s hledáním vzdálenosti čísel od nuly, kde žáci mají nejprve najít vzdálenost konkrétních celých čísel od nuly a potom toto zobecňují[17]. Následuje podle mého názoru velmi těžká úloha, kde mají žáci zdůvodnit platnost vztahu, v němž se vyskytují rozdíly dvou proměnných v absolutních hodnotách[18].

Další úlohy jsou zajímavé především proto, že se v nich nevyskytují písmena v roli proměnných a neznámých, ale přesto tyto úlohy mají propedeutickou funkci z hlediska výuky rovnic. Žáci je povětšinou musí řešit metodou pokus-omyl. Úlohy mají atraktivní podobu hádanek. Jedná se o tyto úlohy:

- Součet čtyř po sobě jdoucích lichých čísel je 320. Která to jsou čísla?[19]
- Vepiš do kroužků přirozená čísla od 1 do 7 (každé právě jednou) tak, aby součet čísel ve vrcholech každého čtyřúhelníku byl roven 15.[20]
- Najdi tři čísla tak, aby druhé číslo bylo 4x větší než první a třetí bylo o 5 menší než druhé číslo. Jejich součet je 67.[21]
- Nakladatelství připravuje vydání slovníku. Příprava tisku stojí bez ohledu na počet vydaných výtisků 150 000 Kč. Tiskárna účtuje 80 Kč za jeden výtisk. Jaké budou náklady na jeden slovník, vydá-li se 5 000 výtisků? Při jakém počtu vydaných slovníků budou náklady na jeden výtisk 95 Kč?[22]

[10] Fraus 7, str. 10
[11] Fraus 7, str. 17
[12] Fraus 7, str. 25, 26
[13] Fraus 7, str. 28, 29
[14] Fraus 7, str. 31 (1)
[15] Fraus 7, str. 31 (5)
[16] Fraus 7, str. 31 (6)
[17] Fraus 7, str. 31
[18] Fraus 7, str. 32 (7)
[19] Fraus 7, str. 32 (9)
[20] Fraus 7, str. 32 (11)
[21] Fraus 7, str. 32 (12)
[22] Fraus 7, str. 32 (10)

Poslední dvě úlohy vedou žáky k zobecňování. Autoři na závěr zařadili ještě úlohu na dosazování do vzorce pro výpočet indexu BMI[23].

V kapitole *Zlomky* se do hry dostává neznámá opatrně v souvislosti s rozšiřováním zlomků, kde v jedné úloze mají žáci doplnit na místo hvězdičky celé číslo tak, aby se jednotlivé zlomky sobě rovnaly[24]. Potom se proměnné objeví opět v záhlavích tabulek[25] u některých úloh a také v závěrečném shrnutí, kde je pomocí písmen definován pojem zlomek. Zajímavější práci s proměnnou nabízejí opět úlohy na konci kapitoly. Žáci mají například najít všechna celá čísla $\boldsymbol{a}$, pro která je $|\boldsymbol{a}| < \frac{65}{9}$.[26] Nebo mají uvést příklady zlomků, jejichž hodnota se po přičtení jmenovatele k čitateli i jmenovateli zdvojnásobí, ztrojnásobí, zečtyřnásobí[27].

Zajímavé jsou i úlohy z konce učebnice, kde je v kapitole *A ještě něco navíc* přidána například úloha, ve které mají žáci najít takové $\boldsymbol{x}$, aby platil uvedený vztah[28], nebo velmi těžká úloha, kde jsou uvedeny vzájemné vztahy mezi proměnnými $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ a žáci mají určit hodnotu podílu $\frac{E}{A}$.[29]

V kapitole *Poměr* se proměnné vyskytují opět v definicích a shrnutích pojmů (poměr[30], převrácený poměr[31], přímá úměrnost[32], nepřímá úměrnost[33]). Časté je opět využití v záhlavích tabulek[34].

Nově se zde vyskytuje neznámá v trojčlence, nejprve jako rámeček ve schématu vedoucím k trojčlence, posléze je zastoupena písmenem $\boldsymbol{x}$.

Žáci se v závěru také nově setkávají s úlohami, kde mají sestrojit graf přímé či nepřímé úměrnosti, jež je zadána koeficientem úměrnosti a rozsahem hodnot proměnné $\boldsymbol{x}$,[35] nebo přímo předpisem dané úměrnosti.

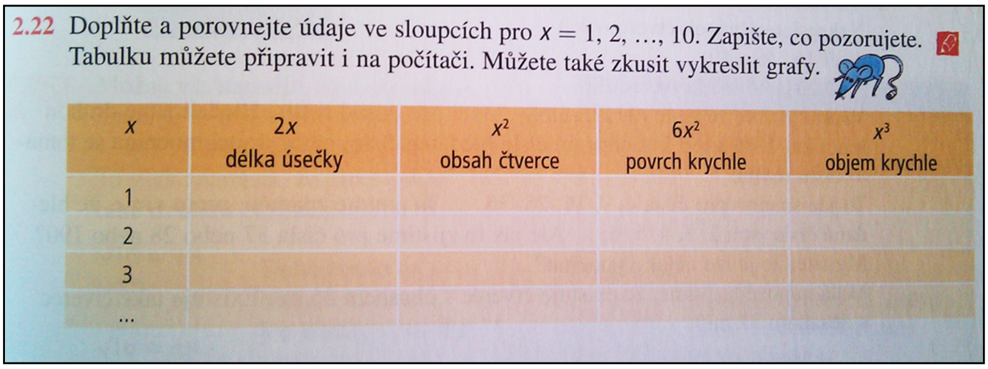
Matematika 8

Učebnice[36] má standardní řazení. Začíná motivačním úvodem, pokračuje opakováním učiva z předchozího ročníku, po němž následují kapitoly *Mocniny a odmocniny*, *Výrazy*, *Rovnice*, *Procenta, úroky*, *statistika*, a končí kapitolou *A ještě něco navíc*, kde jsou k jednotlivým celkům přidány další úlohy

[23] Fraus 7, str. 32 (14)
[24] Fraus 7, str. 42 (2.7)
[25] Fraus 7, str. 46 (3.5), str. 56 (5.7)
[26] Fraus 7, str. 61 (7)
[27] Fraus 7, str. 62 (10)
[28] Fraus 7, str. 94 (13), (14)
[29] Fraus 7, str. 95 (21)
[30] Fraus 7, str. 68, 88
[31] Fraus 7, str. 68, 88
[32] Fraus 7, str. 81, 88
[33] Fraus 7, str. 86, 88
[34] Fraus 7, str. 81, 84, 85
[35] Fraus 7, str. 90 (13), (18), str. 96 (8), (9), (10)
[36] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 127 s.

na procvičení. I v tomto dílu učebnice je na konci zařazena anglická dvoustrana s důležitými slovíčky a s jednoduchými úlohami v angličtině.

V této učebnici autoři již od začátku zařazují práci s proměnnou, aby žáky připravili na kapitolu *Výrazy*. Kromě úvodního opakování, kde se proměnná vyskytuje v případech, které již byly popsány v učebnici pro 7. ročník, se proměnné objevují zejména v záhlavích tabulek různých úloh. Nejčastěji autoři používají tabulku na procvičení výpočtů mocnin a odmocnin, příkladem je úloha na obrázku 4[37].

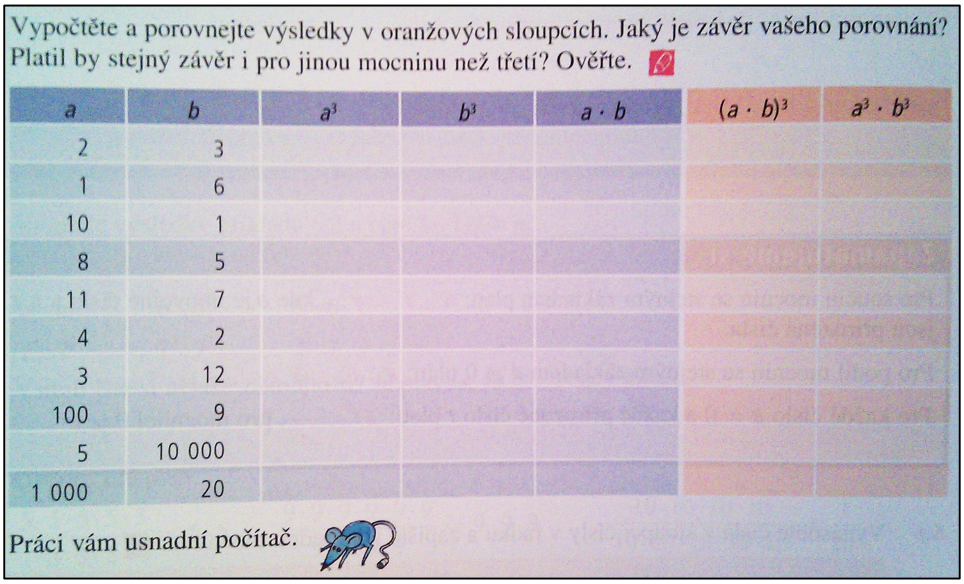


2.22 Doplňte a porovnejte údaje ve sloupcích pro $x = 1, 2, \ldots, 10$. Zapište, co pozorujete. Tabulku můžete připravit i na počítači. Můžete také zkusit vykreslit grafy.

x	$2x$ délka úsečky	x^2 obsah čtverce	$6x^2$ povrch krychle	x^3 objem krychle
1				
2				
3				
…				

Obrázek 4

Běžné je však i využití tabulek při odvozování vzorečků. Jedná se o úlohy, kde mají žáci vyplňováním hodnot do tabulky odvodit nějaký vztah nebo vlastnost, která je potom za pomoci proměnných shrnuta v rámečku s názvem *Co jsme objevili* nebo *Zapamatujeme si*. Příkladem může být odvození vztahu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ na základě úlohy na obrázku 5[38].



Vypočtěte a porovnejte výsledky v oranžových sloupcích. Jaký je závěr vašeho porovnání? Platil by stejný závěr i pro jinou mocninu než třetí? Ověřte.

a	b	a^3	b^3	$a \cdot b$	$(a \cdot b)^3$	$a^3 \cdot b^3$
2	3					
1	6					
10	1					
8	5					
11	7					
4	2					
3	12					
100	9					
5	10 000					
1 000	20					

Práci vám usnadní počítač.

Obrázek 5

[37] Fraus 8, str. 23 (2.22)
[38] Fraus 8, str. 44

I v této učebnici se žáci setkávají s proměnnými v definicích některých pojmů, například druhá mocnina a odmocnina, třetí mocnina a odmocnina, n-tá mocnina. Autoři si však dávají záležet, aby písmena „nepadala žákům z nebe", vše nejprve ukazují a procvičují s konkrétními čísly a až shrnutí zapisují pomocí proměnných.

Autoři zařadili do učebnice i části, kde žákům vysvětlují, jak se orientovat v *Tabulkách pro ZŠ* a jak počítat s mocninami a odmocninami na kalkulačce.

Ke konci kapitoly *Mocniny a odmocniny* se v úlohách začínají objevovat jednoduché výrazy s proměnnou, které žáci řeší na základě zkušeností z předchozích cvičení. Vyskytují se zde i úlohy, v nichž je neznámá zastoupena prázdným rámečkem a žáci hledají, jaký výraz do čtverečku dosadit. Tyto úlohy se mi již zdají docela těžké, ale v návaznosti na práci s číselnými výrazy mohou žáci řešení snadno odvodit[39]. Celá kapitola je zakončena úlohami s fyzikální tematikou, kde jsou žákům předkládány vzorce, pomocí nichž určují hodnoty určených veličin. Vhodně to tak žáky připravuje na následující kapitolu *Výrazy*, kde již mají chápat význam pojmu proměnná.

Kapitola *Výrazy* je velmi pestrá co do typů úloh. Autoři ji zahajují vysvětlením, co to výrazy jsou. Pomáhají si příklady, se kterými se již žáci před tím setkali. Následují úlohy na manipulaci s výrazy v pro žáky uchopitelném kontextu, zejména geometrickém. Příkladem je úloha, kde mají žáci sečíst úsečky a, b, c, jsou-li zadány jejich délky, a určit délku výsledné úsečky, případně od sebe úsečky odečíst, vynásobit konstantou apod. Nebo určit obsah obdélníku, který se skládá z menších obdélníčků o daných rozměrech.

Autoři zařadili i dvě úlohy na zobecňování. V první žáci doplňují do tabulky, jak by vypočítali cenu auta po dané slevě. Bohužel se v úloze nevyskytuje krok od konkrétního k obecnému, přestože k tomu úloha navádí. Zaujala mě však úloha[40], kde mají žáci nejprve odpovědět na otázky, kolik shodných stran má pravidelný pětiúhelník, z kolika shodných rovnoramenných trojúhelníků se skládá a jaký úhel svírají ramena těchto trojúhelníků, a poté mají vymyslet, jak by to bylo v případě pravidelného n-úhelníku.

Následuje několik cvičení s číselnými výrazy, kde si žáci opakují pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami, které operace mají přednost a jak je to s mínusem před závorkou.

Autoři nezapomněli ani na matematický diktát, kde mají žáci za úkol zapsat slovně popsaný výraz, například dvojnásobek čísla 8 zmenšeného o tři, nebo součet čísel x a y.

Zajímavá je i úloha, kde je místo znamének v číselném výrazu uvedena hvězdička a žáci mají doplnit znaménka $+$, $-$, $\cdot$ tak, aby se hodnota výrazu rovnala mínus jedné.

[39] Fraus 8, str. 44 (6.8), (6.9); str. 46 (6.14)
[40] Fraus 8, str. 53 (1.7)

Následují úlohy na určení hodnoty výrazů, když jsou zadány výrazy s proměnnými a hodnoty proměnných.

Autoři také uvedli úlohy, v nichž se k danému kontextu hledá výraz. Příkladem je úloha, kde mají žáci navrhnout takový výraz, aby se dalo podle zadaných informací rychle vypočítat, kolik peněz má domovník vybrat každý měsíc od majitelů bytů do společného fondu[41]. O stránku dál se vyskytuje úloha, která naopak vede žáky k hledání kontextu k zadaným výrazům – v úloze je uvedeno několik „vzorečků", které vyjadřují obsah, povrch nebo objem geometrických útvarů nebo těles, a žáci mají určit, o která tělesa nebo útvary se jedná.

Operace s mnohočleny se v učebnici zavádějí názorně, aby byl žákům jasný princip. U sčítání a odčítání si autoři pomáhají sledem několika výrazů – nejprve číselných, se kterými žáci pracovat umí. Potom místo některých čísel umisťují obrázky jablek a hrušek a nakonec na stejná místa dají proměnné tak, aby žáci viděli, že se s nimi pracuje stejně. Je to jediné místo v této řadě učebnic, kde proměnná nahrazuje přímo předmět (předmětem jsou hrušky resp. jablka), jinak autoři používají písmena v souvislostech tak, aby je žáci chápali jako neznámé nebo proměnné.

Násobit mnohočleny se žáci učí pomocí geometrie, přes obsahy obdélníků. Nejprve vyjadřují různými způsoby obsah obdélníku, který je rozdělen na menší obdélníčky, poté zkoušejí graficky znázornit napsané výrazy. V závěru je vše shrnuto a žákům je dán návod, jak roznásobit závorky mnohočlenů, aniž by museli používat grafické reprezentace.

U vytýkání autoři nejprve nechávají žáky zkoumat dělitelnost výrazů. Poté zařadili úlohu, kde žáci v jednom sloupci procvičují násobení mnohočlenů a v druhém zkoumají, zda jsou podobné výrazy součinem dvou jiných výrazů. Následuje shrnutí.

K výuce vzorců pro úpravy mnohočlenů přistupují autoři opět nejprve geometricky za pomoci obsahů čtverců. Brzy však přecházejí na algebraické vyjádření, kde si žáci ověřují platnost některých vzorců za využití násobení dvojčlenů.

V kapitole *Rovnice* autoři na úvod zařadili tři propedeutické úlohy s motivační funkcí. Po nich následuje tabulka „Jak na to", kde se vysvětluje, co je to rovnice a co znamená řešit rovnici. Potom jsou uvedeny různé úlohy s řešením, které je vždy zapsáno rovnicí, úlohy se však řeší úvahou, obrázkem apod. Vyskytuje se zde i úloha, kde se využívají rovnoramenné váhy. Následuje shrnutí pravidel pro úpravy rovnic. Zajímavé jsou úlohy na procvičení – kromě standardních se tam nachází i taková, kde mají žáci rovnicí zapsat situaci na obrázku[42]. Dál se řeší i složitější úlohy a rovnice jsou prezentovány jako prostředek k ulehčení řešení slovních úloh.

[41] Fraus 8, str. 56 (1.16)
[42] Fraus 8, str. 76 (1.4) a (1.5)

V kapitole *Procenta*, *úroky*, *statistika* se proměnná příliš nevyskytuje. Neznámá se občas vyskytuje při řešení slovních úloh, zejména při řešení trojčlenkou nebo rovnicí. Žáci se s proměnnou potkávají zejména ve *Statistice*, kde se zavádí aritmetický průměr, který je popsán vzorcem.

V závěru učebnice, v části s názvem *A ještě něco navíc*, jsem objevila opravdu obtížnou úlohu[43]. Žáci mají ověřit, že platí uvedené čtyři vztahy – vždy se jedná o součet nebo rozdíl mocnin dvou neznámých čísel a, b, které se rovnají součinu dvou mnohočlenů. Poslední výraz v řadě je: $a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Matematika 9

Učebnice[44] úzce navazuje na předchozí 8. ročník. Po motivačním úvodu autoři zařadili kapitoly *Lomené výrazy*, *Rovnice*, *Funkce* a kapitolu *A ještě něco navíc*, která obsahuje zajímavé úlohy z finanční matematiky a statistiky a poukazuje na to, jak lze zkreslit data obsažená v grafech. V závěru opět nechybí několik anglických stran týkajících se probíraného učiva.

Ačkoliv první kapitola nese název *Lomené výrazy*, autoři s žáky na prvních stranách důkladně opakují znalosti o výrazech, které žáci získali v 8. ročníku. Nejprve si žáci opakují dělitelnost a násobky čísel, práci s číselnými výrazy, zápis výrazů na základě slovního popisu i slovní popis zapsaného výrazu, práci s výrazy s proměnnými i určování jejich hodnot. V průběhu opakování se vyskytují některé zajímavé úlohy. Například[45] žáci mají na místo hvězdiček v uvedeném číselném výrazu doplnit dvojciferné číslo tak, aby byl výsledný výraz dělitelný 5, 7, nebo 11. Nebo v jiné úloze[46] mají najít taková přirozená čísla $a < b < c < d$, aby platilo: $a + b = \frac{c+d}{3}$. Zaujala mě také úloha, kde si žáci mají myslet nějaké celé číslo, provést s ním sled operací (např. odečíst 3, vynásobit 4 apod.) a určit, jestli výsledné číslo bude vždy kladné, záporné, sudé, liché, nebo jestli ani jedna možnost není správná. Všechny tyto úlohy vhodně napomáhají podporovat žákovské myšlení při práci s proměnnou. Oproti standardním úlohám na manipulaci s výrazy je podle mého názoru u těchto úloh menší nebezpečí, že by u žáků docházelo k formalismům.

Samotné lomené výrazy autoři zavádějí ve stejném stylu jako ostatní učivo, kde stavějí na tom, co již žáci znají. Poukazují na podobnost s tím, jak se v minulosti žáci dostali od celých čísel (případně přirozených) ke zlomkům a jak se nyní dostanou od číselných výrazů a výrazů s proměnnými k výrazům lomeným. Následně je žákům předložena definice lomených výrazů a vysvětlení, proč se u lomených výrazů musí určovat podmínky, za kterých mají výrazy smysl. Potom mají žáci možnost si na několika úlohách ujasnit, zda tomu rozumí. Autoři vhodně zařadili i úlohu, kde mají žáci určit, pro které hodnoty

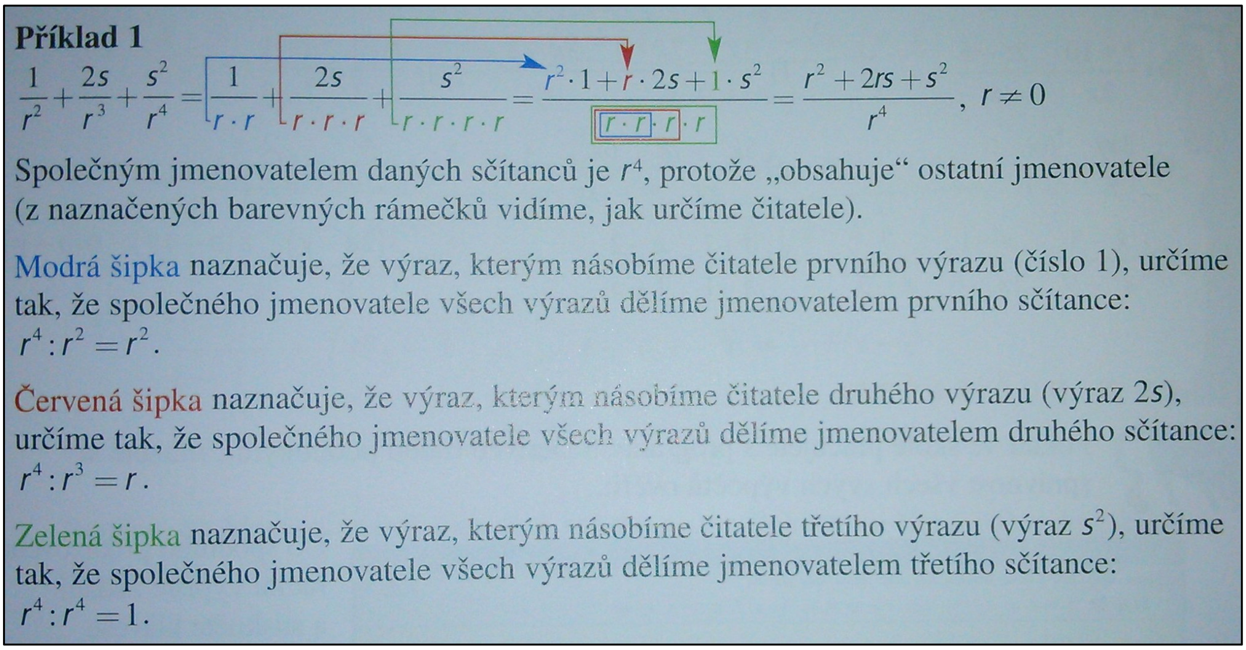
[43] Fraus 8, str. 119 (10)
[44] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 112 s.
[45] Fraus 9, str. 11
[46] Fraus 9, str. 13 (1.15)

proměnné x se výrazy rovnají nule. Hned ze začátku si tak žáci uvědomí rozdíl mezi určováním podmínek a nulovou hodnotou výrazu.

U operací s lomenými výrazy (rozšiřování, krácení, sčítání, odčítání, násobení a dělení) autoři vhodně poukazují na analogii se zlomky. Každou část věnovanou dané operaci nejprve uvozují cvičením, kde si žáci příslušnou operaci na zlomcích připomenou.

V části věnované rozšiřování a krácení lomených výrazů mě zaujala dvě cvičení[47], kde mají žáci do prázdného rámečku či vynechaného místa doplnit vhodné číslo nebo výraz tak, aby platila rovnost. Například: $\frac{4x}{3}=\frac{16x}{\;}$ nebo $\frac{8b+4u}{4b^2+4bu+u^2}=\frac{4}{(2b+u)}\cdot\frac{\;}{\;}$.

Sčítání a odčítání lomených výrazů je (stejně jako u zlomků) založeno především na hledání společného jmenovatele lomených výrazů. Poněkud nešťastný se mi zdá návod na hledání společného jmenovatele, který uvádím na obrázku 6. Autoři zde sice správně a s pomocí barevných šipek na dvou příkladech ukazují, jak sečíst či odečíst lomené výrazy, ale uvedený návod vypadá velmi složitě a navádí k formálnímu uchopení poučky[48]. Podle mého názoru by bylo vhodnější vést žáky nejprve k rozšiřování příslušných sčítanců tak, aby všechny měly stejného jmenovatele, a daly se tedy snadno sečíst (odečíst). K poučce, co se má čím dělit a násobit, by žáci potom došli sami.



Příklad 1

$$\frac{1}{r^2}+\frac{2s}{r^3}+\frac{s^2}{r^4}=\frac{1}{r\cdot r}+\frac{2s}{r\cdot r\cdot r}+\frac{s^2}{r\cdot r\cdot r\cdot r}=\frac{r^2\cdot 1+r\cdot 2s+1\cdot s^2}{r\cdot r\cdot r\cdot r}=\frac{r^2+2rs+s^2}{r^4},\quad r\neq 0$$

Společným jmenovatelem daných sčítanců je r^4, protože „obsahuje“ ostatní jmenovatele (z naznačených barevných rámečků vidíme, jak určíme čitatele).

Modrá šipka naznačuje, že výraz, kterým násobíme čitatele prvního výrazu (číslo 1), určíme tak, že společného jmenovatele všech výrazů dělíme jmenovatelem prvního sčítance: $r^4 : r^2 = r^2$.

Červená šipka naznačuje, že výraz, kterým násobíme čitatele druhého výrazu (výraz $2s$), určíme tak, že společného jmenovatele všech výrazů dělíme jmenovatelem druhého sčítance: $r^4 : r^3 = r$.

Zelená šipka naznačuje, že výraz, kterým násobíme čitatele třetího výrazu (výraz s^2), určíme tak, že společného jmenovatele všech výrazů dělíme jmenovatelem třetího sčítance: $r^4 : r^4 = 1$.

Obrázek 6

Složeným výrazům jsou věnovány jen necelé tři strany. Velmi si však cením zařazení úlohy, kde jsou žáci postaveni před problém rozhodnout, který ze dvou lomených výrazů je výsledkem zjednodušení

[47] Fraus 9, str. 20 (3.6), str. 22 (3.8)
[48] Fraus 9, str. 23 tabulka „Jak na to“

složeného lomeného výrazu, v němž není jasné, která zlomková čára je hlavní[49]. Žáky to nutí k přemýšlení a vede je to k uvědomění si důležitosti přehledného zápisu.

V závěru kapitoly je ještě část s názvem *Zkouška znalostí*, kde mají žáci možnost procvičit si získané znalosti. Zde se vyskytují i úlohy, v nichž mají žáci vytvořit slovní úlohu k zadanému výrazu[50], nebo vyjádřit neznámou ze vzorce[51]. Ne úplně typické (ale z hlediska propojení s dalšími předměty vhodné) se mi zdá zařazení úloh s chemickou tematikou[52], kde žáci procvičují dosazování do vzorce. Zajímavá je i úloha[53], v níž žáci hledají, kdy není výraz $\frac{x^2-81}{x+9}$ roven výrazu $x-9$. Žáky však také jistě baví úloha[54], v níž je rozepsána úprava lomeného výrazu a žáci mají odhalit všechny chyby.

2.1.2 Řada učebnic z nakladatelství Prometheus (Odvárko, Kadleček)

Učebnice z nakladatelství Prometheus jsou černobílé, doplňuje je pouze modrý resp. zelený tisk, pomocí kterého jsou zdůrazněné důležité části a který také osvěžuje některé obrázky. Učivo je členěno do kapitol, kde jsou obvykle na začátku zařazeny vzorové řešené úlohy (řešení bývá od zadání graficky odlišeno psacím písmem) a následují přehledné informace v barevném rámečku. Poté je zařazena série úloh, které mají spíše cvičný charakter.

Matematika pro 6. ročník

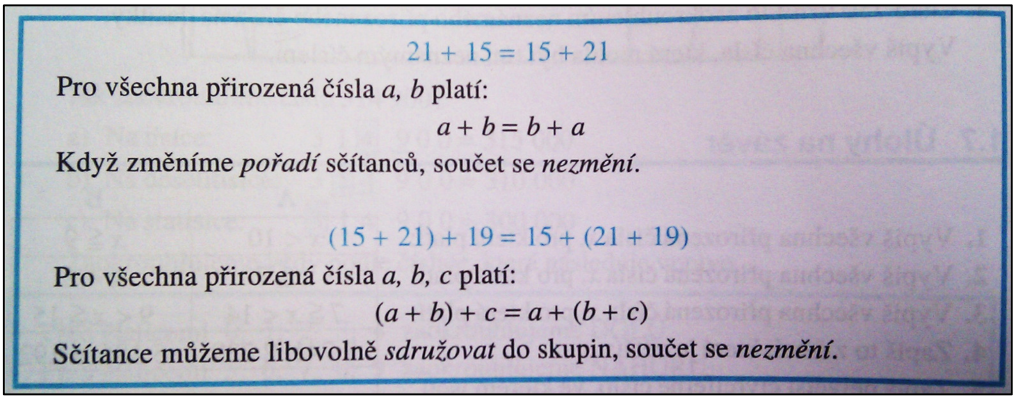
Učebnice pro 6. ročník se skládají ze tří svazků. První díl[55] obsahuje opakování aritmetiky a geometrie z předchozího ročníku. Je rozčleněn do kapitol *Přirozená čísla*, *Počítáme s přirozenými čísly*, *Desetinná čísla a zlomky*, *Souhrnná cvičení* a navíc ještě 4 kapitoly z geometrie. Druhý díl[56] se věnuje desetinným číslům a dělitelnosti přirozených čísel. Obsahuje kapitoly *Tisíciny i miliontiny*, *Sčítání a odčítání desetinných čísel*, *Jednotky délky*, *hmotnosti a obsahu*, *Násobení desetinných čísel*, *Dělení desetinných čísel*, *Souhrnná cvičení*, *Dělitel a násobek*, *Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek* a *Souhrnná cvičení*. Třetí díl učebnice je věnován geometrii.

Proměnná se v prvním díle učebnice poprvé vyskytuje ve stejném kontextu, jako je tomu v učebnici pro 6. ročník z nakladatelství Fraus. Jedná se o úlohy, v nichž mají žáci porovnávat velikost přirozených čísel. Například[57] mají vypsat všechna přirozená čísla, pro něž platí $x<5$. Podobných úloh je v kapitole *Přirozená čísla* několik.

---

[49] Fraus 9, str. 33 (6.4)
[50] Fraus 9, str. 35 (2)
[51] Fraus 9, str. 36 (9), (10)
[52] Fraus 9, str. 37 (11), (12)
[53] Fraus 9, str. 37 (13)
[54] Fraus 9, str. 37 (15)
[55] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2002, 80 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).
[56] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).
[57] Odvárko 6, 1. díl, str. 5 (A)

Autoři písmena používají také k popisu vlastností operací s přirozenými čísly. Například hned po úvodu ke sčítání přirozených čísel je v modrém rámečku (viz obrázek 7) pomocí proměnných a, b, c, vyjádřeno, že sčítání je komutativní, asociativní a že existuje neutrální prvek vzhledem ke sčítání.[58] Podobně je tomu i u násobení přirozených čísel. Samotné pojmy komutativita, asociativita, neutrální prvek v učebnici uvedeny nejsou; zápis písmeny je doplněn slovním komentářem a příkladem s konkrétními přirozenými čísly.



$$21 + 15 = 15 + 21$$

Pro všechna přirozená čísla a, b platí:

$$a + b = b + a$$

Když změníme *pořadí* sčítanců, součet se *nezmění*.

$$(15 + 21) + 19 = 15 + (21 + 19)$$

Pro všechna přirozená čísla a, b, c platí:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

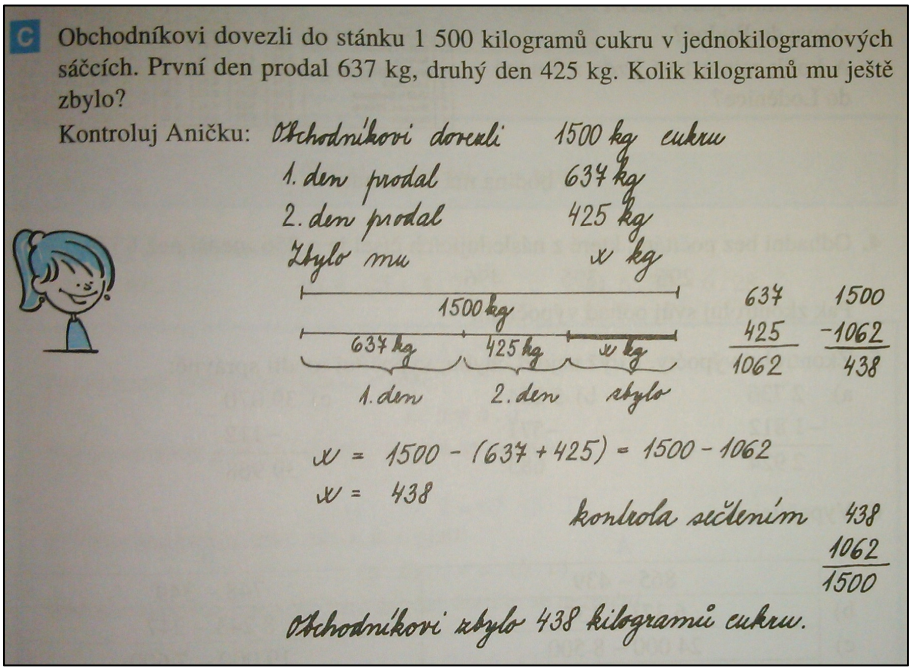
Sčítance můžeme libovolně *sdružovat* do skupin, součet se *nezmění*.

Obrázek 7

Vyskytují se zde také úlohy[59], které slouží jako příprava na pozdější uchopení rovnic. Jedná se o jednoduché rovnosti, kde se místo neznámé vyskytuje otazník nebo písmeno x. Žáci mají za úkol určit hodnotu neznámé nebo najít číslo, které má být místo otazníku, aby platila daná rovnost, například $? + 10 = 54$, nebo určit zpaměti takové číslo x, aby platilo: $47 - x = 30$.

Žáci se setkávají s proměnnou i v některých řešených úlohách na začátku kapitol. Zde autoři v rámci uvedeného řešení jednoduché slovní úlohy sestavují zápis a trošku uměle označují neznámou písmenem x, přestože s ní dále nepracují (viz obrázek 8).[60]

[58] Odvárko 6, 1. díl, str. 14 (B)
[59] Odvárko 6, 1. díl, str. 15 (3), str. 18 (7), (8), str. 24 (7), str. 25 (5), u desetinných č. str. 34 (5), souhrnná cvičení str. 38 (5)
[60] Odvárko 6, 1. díl, str. 17 (C), str. 22 (A)



C Obchodníkovi dovezli do stánku 1 500 kilogramů cukru v jednokilogramových sáčcích. První den prodal 637 kg, druhý den 425 kg. Kolik kilogramů mu ještě zbylo?

Kontroluj Aničku: Obchodníkovi dovezli 1500 kg cukru

1. den prodal 637 kg

2. den prodal 425 kg

Zbylo mu x kg

1500 kg

637 kg | 425 kg | x kg

1. den | 2. den | zbylo

$$\begin{array}{r} 637 \\ \underline{425} \\ 1062 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1500 \\ \underline{-1062} \\ 438 \end{array}$$

$x = 1500 - (637 + 425) = 1500 - 1062$

$x = 438$

kontrola sečtením $\begin{array}{r} 438 \\ \underline{1062} \\ 1500 \end{array}$

Obchodníkovi zbylo 438 kilogramů cukru.

Obrázek 8

Oproti učebnicím z nakladatelství Fraus se v této učebnici prakticky nevyskytují úlohy, kde by se žáci mohli setkat s proměnnou v záhlaví tabulky.

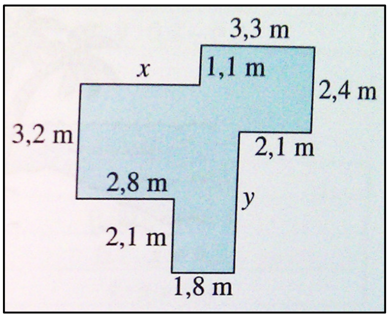
Ve druhém dílu učebnice pro 6. ročník se proměnná poprvé vyskytuje v souvislosti s porovnáváním desetinných čísel. Žáci mají například[61] zapsat všechna přirozená čísla, pro něž platí vztah: $78{,}5 \leq x \leq 82{,}4$.

Nejčastěji se však proměnná objevuje v propedeutických úlohách na rovnice, které se vyskytují v rámci všech kapitol věnovaným operacím s desetinnými čísly. Jedná se o jednoduché rovnice s neznámou x, případně je v rovnosti místo neznámé otazník. Žáci mají najít neznámé číslo x (nebo dosadit za otazník takové číslo), aby platila rovnost[62]. Například $19{,}4 - x = 18{,}7$; $13{,}67 \cdot ? = 136{,}7$; $4{,}5 \cdot x = 0{,}9$.

Dále je i v této učebnici použito písmeno x při vzorovém řešení jednoduché slovní úlohy, kde jím řešitelé označují neznámou hodnotu při zápisu úlohy[63].

Zajímavější je kapitola *Souhrnná cvičení*, kde si žáci prohlubují znalosti o desetinných číslech. Zde je odlišná úloha[64] od již výše zmíněných, v níž žáci pracují s neznámou. Na obrázku 9 je zakreslen plánek členitého pozemku a žáci mají určit, jak dlouhé jsou úseky označené písmeny x a y.

[61] Odvárko 6, 2. díl, str. 9 (9), str. 11 (3)
[62] Odvárko 6, 2. díl, str. 18 (10), str. 20 (6), (7), str. 24 (6), str. 42 (8), str. 46 (6), str. 49 (14)
[63] Odvárko 6, 2. díl, str. 33 (A)
[64] Odvárko 6, 2. díl, str. 47 (2)



Obrázek 9

Zpestřením opakujících se úloh na procvičení jednoduchých rovnic může být i slovní úloha[65]: Když x padesátihaléřů dá dohromady 50 Kč, kolik je x? Nebo úloha[66], v níž mají žáci doplnit místo otazníku všechny číslice, aby platila například nerovnost $7{,}535 > 7{,}?3$ nebo $25{,}672 < 25{,}6?2$.

Zajímavé jsou i některé úlohy z kapitoly *Dělitelnost*. Například úloha, kde mají žáci najít co největší číslo x menší než 100, aby se největší společný jmenovatel toho čísla x a čísla 100 rovnal 5, 1 nebo 4. Nebo matematická hádanka, v níž si Anička myslí dvě různá přirozená čísla menší než 100 a větší než 50, jejichž největší společný dělitel je 20, a žáci mají ta dvě myšlená čísla uhodnout.

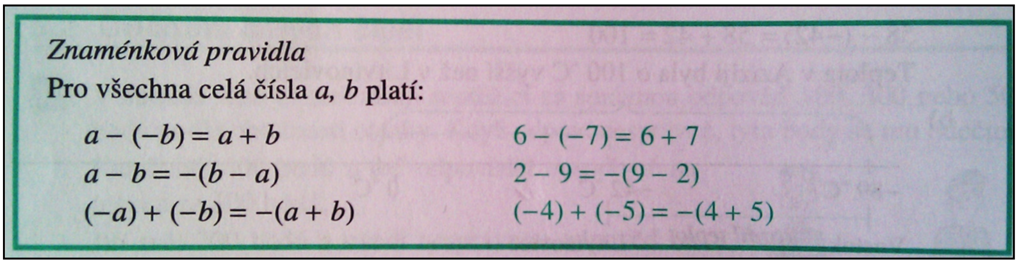
Matematika pro 7. ročník

Učebnice pro 7. ročník se skládají ze tří svazků. V prvním díle[67] se žáci seznamují se zlomky a s celými a racionálními čísly. Učivo je rozděleno do kapitol *Zlomky*, *Počítáme se zlomky*, *Souhrnná cvičení*, *Celá čísla*, *Počítáme s celými čísly*, *Racionální čísla*, *Souhrnná cvičení*. Druhý díl[68] se věnuje poměru, přímé a nepřímé úměrnosti a procentům. Obsahuje kapitoly *Poměr*, *Přímá a nepřímá úměrnost*, *Souhrnná cvičení*, *Procenta a úroky*, *Souhrnná cvičení*. Třetí díl učebnice je věnován geometrii.

Autoři používají písmena v obdobných souvislostech jako v předchozím ročníku. Nejčastěji se neznámá objevuje v úlohách, v nichž mají žáci určit hodnotu neznámé x nebo najít vhodné číslo místo otazníku, aby platila daná rovnost.[69] Dále se zde vyskytují i úlohy na porovnávání, kde žáci hledají všechna celá čísla (nebo vybírají z nabídky taková racionální čísla), aby platila uvedená nerovnost[70]. Opakuje se i použití písmen při popisu vlastností některých operací. Konkrétně v kapitole *Počítáme s celými čísly* je popsána komutativita a asociativita sčítání[71] za pomoci proměnných a, b, c. Totéž je o několik stran

[65] Odvárko 6, 2. díl, str. 47 (4)
[66] Odvárko 6, 2. díl, str. 47 (3)
[67] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).
[68] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 84 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).
[69] Odvárko 7, 1. díl, str. 11(A), 14(9), 22(1), 26(2), 30(8), 32(11), 35(11), 36(3), 36(10), 38(10), 44(9), 51(12), 58(6), 61(3), 72(11), 78(6)
[70] Odvárko 7, 1. díl, str. 47(9), 47(6), 47(10), 52(14), 69(9)
[71] Odvárko 7, 1. díl, str. 51

dále použito pro komutativitu, asociativitu a distributivitu násobení[72] celých čísel. Proměnné jsou použity i v rámečku (viz obrázek 10) shrnujícím znaménková pravidla[73].



Znaménková pravidla

Pro všechna celá čísla a, b platí:

$a-(-b)=a+b$ $\quad$ $6-(-7)=6+7$

$a-b=-(b-a)$ $\quad$ $2-9=-(9-2)$

$(-a)+(-b)=-(a+b)$ $\quad$ $(-4)+(-5)=-(4+5)$

Obrázek 10

Písmena se v učebnici navíc objevují ještě v těchto souvislostech:

- Na straně 8 v úloze 8, kde je neznámá x použita v ilustračním obrázku ke slovní úloze.
- V úloze[74], kde žáci hledají takové nejmenší prvočíslo x (posléze složené číslo x), aby byl zlomek $\frac{x}{16}$ v základním tvaru.

V učebnici se také vyskytuje geometrická úloha[75] na procvičení dosazování do vzorce – žáci mají určit objem kvádru, když znají rozměry jednotlivých hran.

Písmeno x autoři využívají také v podkapitole *Absolutní hodnota celého čísla*, kde se mají žáci v úloze[76] rozhodnout, čemu se rovná x, když absolutní hodnota x je rovna 7.

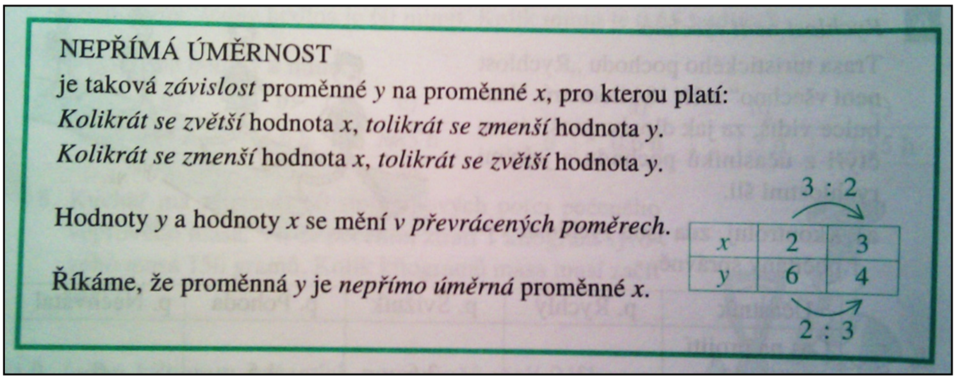
Při zavádění dělení celých čísel si autoři v úvodní úloze[77] vypomáhají logickou úvahou za využití písmene x takto: Podíl dvou čísel $20:(-4)$ bude takové číslo x, pro které platí $x\cdot(-4)=20$.

V hádance[78] mají žáci určit neznámé číslo x, které když vydělí číslem -4 a vzniklý podíl vydělí číslem -3, dostanou -2.

Druhý díl učebnice pro 7. ročník začíná kapitolou *Poměr*, která se přístupem k výuce pojmu proměnná velmi podobá předchozím učebnicím. Písmena zde autoři používají zejména při definování nových pojmů[79] (poměr, převrácený poměr, postupný poměr) nebo v úlohách, kde mají žáci najít hodnotu neznámé x (nebo dosadit na místo otazníku takové číslo), aby platila rovnost[80]. Písmeno x je zde také používáno na označení neznámé v řešených vzorových úlohách[81].

[72] Odvárko 7, 1. díl, str. 58
[73] Odvárko 7, 1. díl, str. 54
[74] Odvárko 7, 1. díl, str. 13(7)
[75] Odvárko 7, 1. díl, str. 33(17)
[76] Odvárko 7, 1. díl, str. 43(5)
[77] Odvárko 7, 1. díl, str. 60(A)
[78] Odvárko 7, 1. díl, str. 61(4)
[79] Odvárko 7, 2. díl, str. 4, str. 6, str. 17
[80] Odvárko 7, 2. díl, str. 11(13), (14), str. 12(15), (16), str. 18(6), str. 26(5)
[81] Odvárko 7, 2. díl, str. 12(A), str. 14(B), str. 16(A)

Zajímavější je kapitola *Přímá a nepřímá úměrnost*, kde se proměnná navíc objevuje v záhlavích tabulek[82] a v předpisech úměrností. Autoři ovšem bez velkých úvodů rovnou přistupují k používání pojmu proměnná a k popisu úměrností pomocí písmen, aniž by vzali v úvahu, že se žáci v rámci učebnice setkávali hlavně s písmenem x reprezentujícím neznámou a že s proměnnou tedy nemají zkušenosti. Příkladem je rámeček s definicí nepřímé úměrnosti[83] na obrázku 11 nebo úloha na obrázku 12, která má žáky vést k zobecňování a k vytvoření předpisu pro graf přímé úměrnosti[84]. Na neznalé žáky může působit velmi komplikovaně.



NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST
je taková *závislost* proměnné *y* na proměnné *x*, pro kterou platí:
Kolikrát se zvětší hodnota *x*, *tolikrát se zmenší* hodnota *y*.
Kolikrát se zmenší hodnota *x*, *tolikrát se zvětší* hodnota *y*.

Hodnoty *y* a hodnoty *x* se mění *v převrácených poměrech*.

Říkáme, že proměnná *y* je *nepřímo úměrná* proměnné *x*.

3 : 2

x	2	3
y	6	4

2 : 3

Obrázek 11

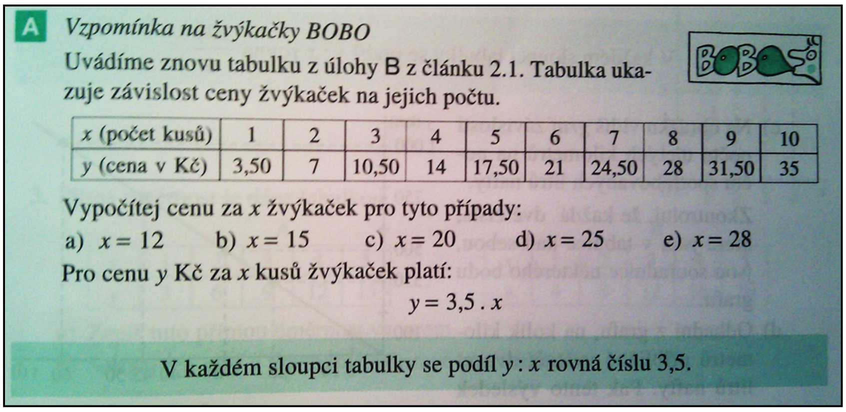
V tomto druhém případě považuji za vhodnější úlohu zpřehlednit například vytvořením tabulky, kam by žáci měli doplnit prázdné buňky (viz tabulka 1).

Tabulka 1

x (počet ks)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (cena)	3,5	7	10,5	14	17,5	21	24,5	28

x (počet ks)	8	9	10	12	15	20	25	28	n
y (cena)	28	31,5	35						

[82] Odvárko 7, 2. díl, str. 28(B), (C), 29(1), (2), 34(B), (1),(2),(3), 41(A), (C), 43(3), (4), 44 (A), (B), 46(2), (3), (4), 47(5), 50(11)
[83] Odvárko 7, 2. díl, str. 34
[84] Odvárko 7, 2. díl, str. 41(A)



A *Vzpomínka na žvýkačky BOBO*

Uvádíme znovu tabulku z úlohy B z článku 2.1. Tabulka ukazuje závislost ceny žvýkaček na jejich počtu.

x (počet kusů)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (cena v Kč)	3,50	7	10,50	14	17,50	21	24,50	28	31,50	35

Vypočítej cenu za x žvýkaček pro tyto případy:

a) $x = 12$ b) $x = 15$ c) $x = 20$ d) $x = 25$ e) $x = 28$

Pro cenu y Kč za x kusů žvýkaček platí:

$$y = 3{,}5 \,.\, x$$

V každém sloupci tabulky se podíl $y : x$ rovná číslu 3,5.

Obrázek 12

I v této kapitole se hojně vyskytují úlohy, kde autoři označují neznámé písmenem x nebo y. Jedná se zejména o slovní úlohy vedoucí k trojčlence[85].

Kapitola *Procenta* využívá proměnnou v úvodní úloze pro popis záhlaví tabulky[86], dále se vyskytuje opět pouze ve formě neznámé, a to v rámci řešení vzorových úloh[87].

Matematika pro 8. ročník

V osmém ročníku je učivo rozděleno do tří učebnic. První díl[88] se věnuje mocninám a odmocninám, zavádí se v něm Pythagorova věta a v závěru se žáci seznamují s výrazy. Učivo je členěno do kapitol *Druhá mocnina a druhá odmocnina*, *Pythagorova věta a její užití*, *Mocniny s přirozeným mocnitelem*, *Souhrnná cvičení*, *Výrazy*, *Mnohočleny*, *Souhrnná cvičení*. Druhý díl[89] obsahuje zejména učivo týkající se lineárních rovnic, na konci je přidána kapitola se základy statistiky. Tomu odpovídá rozdělení kapitol – *Řešení rovnic*, *Rovnice kolem nás*, *Souhrnná cvičení*, *Základy statistiky*, *Souhrnná cvičení*. Třetí díl učebnice se věnuje geometrii.

V prvním díle není kapitola s názvem *Druhá mocnina a odmocnina* co do využití písmen příliš pestrá. Autoři již běžně pracují s proměnnou při zavádění nových pojmů a vlastností. Příkladem je rámeček s definicí druhé mocniny[90] a odmocniny[91] nebo zápisy některých tvrzení[92] za pomoci proměnných a, b na obrázcích 13, 14, 15 a 16.

[85] Odvárko 7, 2. díl, str. 30(D), (E), str. 31(F), str. 35(C)
[86] Odvárko 7, 2. díl, str. 56(A)
[87] Odvárko 7, 2. díl, str. 57(B), str. 58(C), str. 59(D), str. 66(A), (B)
[88] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 95 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).
[89] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 71 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).
[90] Odvárko 8, 1. díl, str. 3
[91] Odvárko 8, 1. díl, str. 13
[92] Odvárko 8, 1. díl, str. 6, str. 15, str. 7, str. 17

Pro všechna čísla a, b platí:

$(a \,.\, b)^2 = a^2 \,.\, b^2$

$(8 \,.\, 1\,000)^2 = 8^2 \,.\, 1\,000^2$

$(6 \,.\, 0{,}01)^2 = 6^2 \,.\, 0{,}01^2$

Obrázek 13

Pro všechna nezáporná čísla a, b platí: $\sqrt{a \,.\, b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$

Obrázek 14

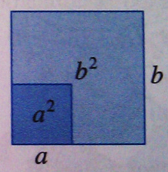
Pro všechna *nezáporná* čísla a, b platí:

Když je $a < b$, pak je také $a^2 < b^2$.

$2 < 7 \quad \ldots \quad 2^2 < 7^2$

$6{,}1 < 8{,}3 \quad \ldots \quad 6{,}1^2 < 8{,}3^2$

$0 < 3 \quad \ldots \quad 0^2 < 3^2$



Obrázek 15

Pro všechna *nezáporná* čísla a, b platí:

Když je $a < b$, pak je také $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

$8 < 11 \quad \ldots \quad \sqrt{8} < \sqrt{11}$

$3{,}96 < 5{,}03 \quad \ldots \quad \sqrt{3{,}96} < \sqrt{5{,}03}$

$0 < 6 \quad \ldots \quad \sqrt{0} < \sqrt{6}$

Obrázek 16

Vyskytují se zde také úlohy, v nichž žáci dosazují známé hodnoty do vzorečku. Jedná se o dvě úlohy s geometrickým kontextem (výpočet obsahu čtverce nebo povrchu krychle)[93] a jednu na výpočet BMI[94]. Standardně jsou zařazeny i úlohy, v nichž žáci mají najít hodnotu neznámé x, pro kterou platí daná rovnost[95].

Kapitola *Pythagorova věta* je založena především na dosazování do vzorce. O něco bohatší je kapitola *Mocniny s přirozeným mocnitelem*, kde se opět proměnná vyskytuje kromě vzorců také v definicích nových pojmů[96] (viz obrázek 17).

[93] Odvárko 8, 1. díl, str. 4(2), 9(8)
[94] BMI (z anglického *body mass index*) je index tělesné hmotnosti; str. 9(7)
[95] Odvárko 8, 1. díl, str. 14(2), (3), (4), str. 22(8)
[96] Odvárko 8, 1. díl, str. 38

MOCNINA S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

Pro každé přirozené číslo n je *n-tá mocnina čísla a* součin, ve kterém je n činitelů a.

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, \dots \,.\, a}_{n \text{ krát}}$$

a^n – mocnitel (n), základ mocniny (a)

čteme *á na n-tou*

$(-0{,}1)^4 = (-0{,}1) \,.\, (-0{,}1) \,.\, (-0{,}1) \,.\, (-0{,}1)$

čtvrtá mocnina čísla $(-0{,}1)$

$7^6 = 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7$

šestá mocnina čísla 7

$2^9 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$

devátá mocnina čísla 2

Obrázek 17

Pomocí proměnných autoři také shrnují pravidla pro počítání s mocninami[97] (viz obrázek 18).

Pravidla pro počítání s mocninami:

$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^m : a^n = a^{m-n} \quad a \neq 0$

$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$ $\qquad (a : b)^n = a^n : b^n \quad b \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m \,.\, n}$

Obrázek 18

I zde jsou zařazeny propedeutické úlohy k rovnicím[98] – žáci mají najít takové x, pro které platí daná rovnost. Například $x^4 = 16$.

Zaujala mě ještě podle mého názoru poměrně těžká úloha[99], kde mají žáci rozhodnout, zda platí uvedené tvrzení (obrázek 19).

C Rozhodni, zda platí: Pro každé záporné číslo a a pro každé přirozené číslo n je a také záporné číslo.

Zkoušej různá a a různá n.

a	n	a^n	příklad
kladné	přirozené	**kladné**	$3^4 = 81$
0	přirozené	**0**	$0^{816} = 0$
záporné	sudé	**kladné**	$(-2)^6 = 64$
záporné	liché	**záporné**	$(-1)^7 = -1$

Obrázek 19

[97] Odvárko 8, 1. díl, str. 47
[98] Odvárko 8, 1. díl, str. 41(15), str. 50(7)
[99] Odvárko 8, 1. díl, str. 40(C)

Zajímavá je i další kapitola s názvem *Souhrnná cvičení*. Kromě běžných úloh připravující na výuku rovnic jsou zde zařazeny i dvě úlohy pracující s proměnnou. V jedné z nich[100] mají žáci rozhodnout, zda platí uvedená tvrzení (obrázek 20).

10. **Rozhodni, zda věta platí; piš *ano – ne*. Když napíšeš *ne*, uveď, proč věta neplatí:**
a) Pro každé číslo a je $a^2 > a$.
b) Pro číslo 0, číslo 1 a číslo -1 je $a^3 = a$.
c) Rovnost $a^2 = a$ platí jen pro číslo 0.
d) Pro každé číslo a je a^4 nezáporné číslo.
e) Pro každé číslo a je a^5 nezáporné číslo.
f) Pro každé nezáporné číslo a je $\sqrt{a} < a$.

Obrázek 20

V další úloze[101] (na obrázku 21) mají najít přirozené číslo c, pro které platí určité podmínky.

11. ***Pro přemýšlivé***
a) Najdi nějaké přirozené číslo c, pro které platí: Všechny jeho mocniny mají na místě jednotek stejnou číslici.
b) Urči, kterou číslici může mít takové číslo c na místě jednotek.
Napovíme k b): Zkoumej postupně číslice 0, 1, ...

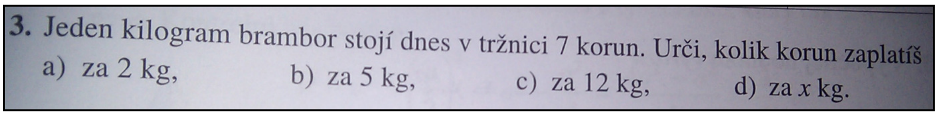
Obrázek 21

Na začátek kapitoly *Výrazy* zařadili autoři opakování znalostí o číselných výrazech. Kromě úprav číselných výrazů[102] mají žáci v této části za úkol i upravovat výrazy tak, aby se jejich hodnota rovnala předem danému číslu[103], nebo přiřazují zapsané výrazy k jejich slovnímu popisu[104].

Následuje část věnovaná výrazům s proměnnými, ke které autoři přistupují značně instruktivně. Bez úvodu a vysvětlení, co to vlastně výraz s proměnnými je, je rovnou zařazena poměrně náročná slovní úloha, jejímž úkolem je vytvořit vzorec na výpočet ceny zájezdu pro obecný počet dospělých a dětí. Úloha je uvedena s řešením a vysvětlením, přesto podle mého názoru působí složitě. Poté je v rámečku nabídnut návod, jak vypočítat hodnotu výrazu se zadanými hodnotami proměnných, a pod ním následují úlohy, na nichž si mají žáci tuto látku procvičit[105]. V rámci nich jsou kromě klasických dosazovacích uvedeny ještě i tyto další typy úloh:

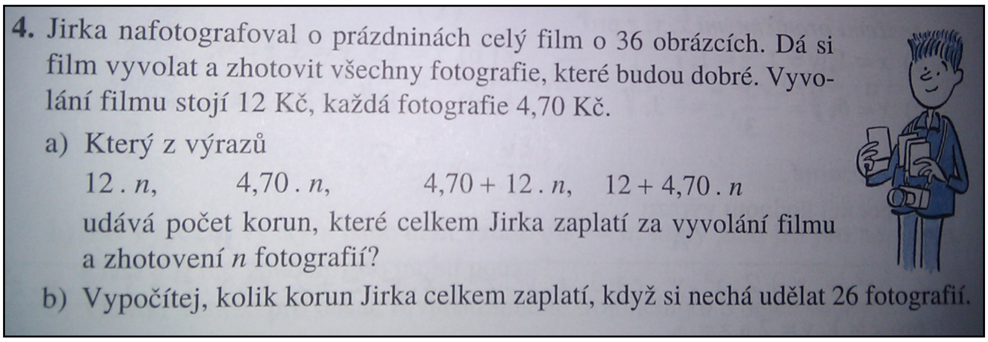
[100] Odvárko 8, 1. díl, str. 52(10)
[101] Odvárko 8, 1. díl, str. 52(11)
[102] Odvárko 8, 1. díl, str. 54(A), (1), (2)
[103] Odvárko 8, 1. díl, str. 55(3)
[104] Odvárko 8, 1. díl, str. 56(B), (10), (11), (12)
[105] Odvárko 8, 1. díl, str. 59(1), (2), str. 60(6), (7), (8), (9), (10), (11), str. 64(7), (8)

- úloha na zobecňování[106] (viz obrázek 22), u které by ale pro větší přehlednost napomohlo formátování do tabulky;
- úlohy, kde mají žáci přiřadit správný výraz ke kontextu v zadání[107] (viz např. obrázek 23); typově jsou tyto úlohy velmi podobné těm, které byly použity v mém výzkumu;
- úlohy, kde mají žáci k dispozici vzorec (například vztah pro výpočet dráhy rovnoměrného pohybu[108]) a mají vypočítat hodnotu jedné z veličin;
- úlohy se slovně popsanými výrazy, které mají žáci zapsat pomocí symbolů[109].



3. Jeden kilogram brambor stojí dnes v tržnici 7 korun. Urči, kolik korun zaplatíš
a) za 2 kg, b) za 5 kg, c) za 12 kg, d) za x kg.

Obrázek 22



4. Jirka nafotografoval o prázdninách celý film o 36 obrázcích. Dá si film vyvolat a zhotovit všechny fotografie, které budou dobré. Vyvolání filmu stojí 12 Kč, každá fotografie 4,70 Kč.
a) Který z výrazů
$12 \,.\, n$, $4{,}70 \,.\, n$, $4{,}70 + 12 \,.\, n$, $12 + 4{,}70 \,.\, n$
udává počet korun, které celkem Jirka zaplatí za vyvolání filmu a zhotovení n fotografií?
b) Vypočítej, kolik korun Jirka celkem zaplatí, když si nechá udělat 26 fotografií.

Obrázek 23

Na konci kapitoly jsou zařazeny geometrické úlohy, v nichž mají žáci odvodit nějaký vztah, například vzorec pro výpočet velikosti výšky v rovnostranném trojúhelníku nebo vzorec pro výpočet délky úhlopříčky v krychli[110]. Kapitolu uzavírají úlohy podobné té úvodní. Žáci v nich mají sestavit vzorec například pro výpočet daně ze stavebního pozemku[111].

Celá následující kapitola je věnována mnohočlenům. Žáci se nejprve seznamují s pojmy jednočlen a koeficient a učí se stručnému zápisu jednočlenů. Poté je zaveden pojem mnohočlen a na několika úlohách je tento pojem upevňován. Zaujaly mě zejména tyto dvě úlohy:

- Žáci mají rozhodnout o pravdivosti tvrzení pro uvedený mnohočlen[112] (obrázek 24).
- Žáci mají napsat příklad mnohočlenu, který splňuje daná kritéria[113] (obrázek 25).

[106] Odvárko 8, 1. díl, str. 59(3)
[107] Odvárko 8, 1. díl, str. 59(4), 64(10)
[108] Odvárko 8, 1. díl, str. 59(5), 62(4)
[109] Odvárko 8, 1. díl, str. 60(12), 61(13), (14), str. 64(9)
[110] Odvárko 8, 1. díl, str. 61(A), str. 62(2), (3)
[111] Odvárko 8, 1. díl, str. 62(B), str. 63(5), (6)
[112] Odvárko 8, 1. díl, str. 67(9)
[113] Odvárko 8, 1. díl, str. 67(11), (12)

9. Rozhodni, zda pro mnohočlen

$$7m^2p^2 + (-12)mr^2 + 0{,}8r^3p^3$$

platí následující tvrzení; piš *ano – ne*:

a) Je to čtyřčlen.

b) Koeficient členu $(-12)mr^2$ je -12.

c) Koeficienty všech členů mnohočlenu jsou celá čísla.

d) V každém členu se vyskytují dvě proměnné.

e) V mnohočlenu jsou celkem tři proměnné.

Obrázek 24

11. *Pro přemýšlivé*

Napiš příklad mnohočlenu, pro který platí následující tři podmínky:

– je to čtyřčlen,

– dva jeho koeficienty jsou kladná čísla, zbývající dva koeficienty jsou záporná čísla,

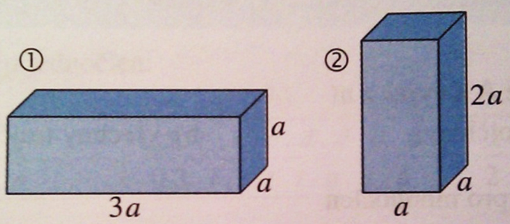
– vyskytují se v něm celkem dvě proměnné.

Obrázek 25

Sčítání a odčítání mnohočlenů je zavedeno pomocí povrchu dvou kvádrů[114] na obrázku 26.

A *Povrchy kvádrů*

Na obrázku vidíš dva kvádry s připsanými délkami hran.



a) Zapiš pro kvádr ① obsahy všech jeho stěn a potom vypočítej jeho povrch.

b) Stejné úkoly jako v a) řeš pro kvádr ②.

c) Porovnej povrchy obou kvádrů. Který z nich má větší povrch a o kolik?

$$\underline{2n^2} + \underline{6n^3} - \underline{2n^3} + \underline{n^2} = (\underline{2n^2} + \underline{n^2}) + (\underline{6n^3} - \underline{2n^3}) = 3n^2 + 4n^3$$

Obrázek 26

Autoři však příliš neřeší, že žáci ještě neumí sčítat jednočleny, a předpokládají, že je pro ně sčítání intuitivní. Teprve po několika cvičeních jsou shrnuta pravidla pro sčítání do barevného rámečku.

[114] Odvárko 8, 1. díl, str. 68 (A)

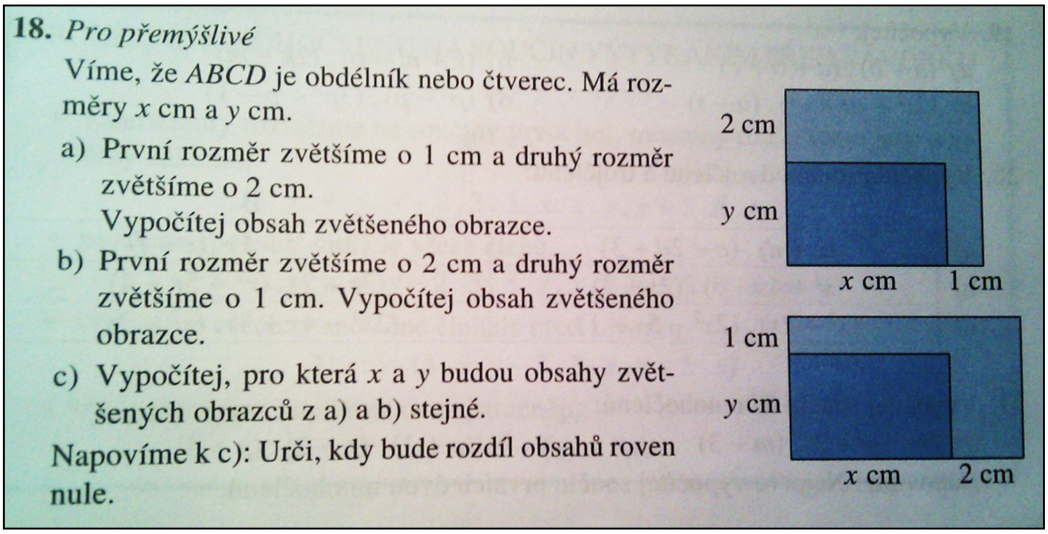
Následují úlohy na zjednodušování mnohočlenů, mezi nimiž se nacházejí i tři úlohy[115], ve kterých žáci nejprve musí daný mnohočlen podle slovního popisu nebo obrázku sestavit. Mezi těmito úlohami jsou zařazena i cvičení na určení hodnoty součtu mnohočlenů.

K odčítání autoři rovnou přistoupili instruktivně tak, že popsali postup do rámečku a pod něj uvedli sadu procvičujících úloh.

Stejně tak pojali i násobení mnohočlenů. Nejprve ukázali, jak se násobí jednočleny mezi sebou, a uvedli pomocný vzoreček $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Potom dali žákům prostor na procvičení. Následovala ukázka násobení mnohočlenu jednočlenem a opět sada procvičovacích úloh, které zpestřili pouze několika obměněnými úlohami typu:

- Rozhodni, zda je vypočteno správně. (Uvedeny postupy několika výpočtů.)
- Slovně jsou popsány operace na sestavení složeného výrazu, žáci jej mají upravit. Např. Od trojnásobku dvojčlenu $5n - 2$ odečti dvojnásobek dvojčlenu $3n + 1$; získaný výraz vyjádři jako dvojčlen[116].

Poslední v řadě následuje návod na násobení mnohočlenu mnohočlenem, který autoři podpořili uvedením vzorce $(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd$. V rámci opakujících se úloh na procvičení se vyskytuje jedna zajímavá s geometrickým kontextem[117] (viz obrázek 27).


18. *Pro přemýšlivé*
Víme, že *ABCD* je obdélník nebo čtverec. Má rozměry *x* cm a *y* cm.
a) První rozměr zvětšíme o 1 cm a druhý rozměr zvětšíme o 2 cm. Vypočítej obsah zvětšeného obrazce.
b) První rozměr zvětšíme o 2 cm a druhý rozměr zvětšíme o 1 cm. Vypočítej obsah zvětšeného obrazce.
c) Vypočítej, pro která *x* a *y* budou obsahy zvětšených obrazců z a) a b) stejné.
Napovíme k c): Urči, kdy bude rozdíl obsahů roven nule.

Obrázek 27

Rozklad mnohočlenů na součin autoři zavádějí pomocí tří příkladů rovností, u nichž mají žáci s využitím roznásobení určit, zda jsou správně[118]. Analogicky pak mají vytvořit podobné rovnosti (vytknout vhodné

[115] Odvárko 8, 1. díl, str. 69(3), (4), (5)
[116] Odvárko 8, 1. díl, str. 74(12)
[117] Odvárko 8, 1. díl, str. 75(18)
[118] Odvárko 8, 1. díl, str. 77(A)

jednočleny z jednoduchých dvojčlenů). Po tomto úvodu je pro žáky podrobně popsán postup vytýkání v barevném rámečku a následují opět úlohy na procvičení, mezi nimiž se vyskytuje jedna netypická – žáci mají dokázat, že součet libovolných tří po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný třemi[119].

O stránku dál je ukázáno, jak lze z mnohočlenu vytknout dvojčlen[120], na což jsou zacíleny další procvičovací úlohy. Poslední v řadě je uvedena sice podobná, zato náročnější úloha, v níž mají žáci postupným vytýkáním rozložit na součin daný čtyřčlen[121].

Vzorce usnadňující úpravy zavádějí autoři pomocí příkladů, v nichž násobí mnohočleny mezi sebou a posléze ukazují na vzniklé zákonitosti. I zde vždy po odvození vzorce následuje několik úloh na procvičení nového poznatku. Mezi těmito úlohami se kromě úloh na opakované dosazování do vzorců nacházejí i některé další, mírně obměněné:

- úlohy, kde mají žáci zpaměti vypočítat hodnoty některých mocnin přirozených čísel či součinů přirozených čísel, jejichž výpočet usnadní použití vzorců, například[122]: $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$;
- úlohy, kde mají žáci doplnit na místo otazníků správný výraz tak, aby platila rovnost[123];
- vyřešené úlohy, u nichž mají žáci ověřit správnost výpočtu[124];
- úlohy na užití vzorců[125], kde musí žáci použít substituci (jedná se o složený výraz), například $(a+b+1)^2$; nebo v nichž žáci kromě dosazení do známých vzorců musí použít i násobení mnohočlenů, například: $(a+b)^3$;
- úlohy na procvičení opačného použití vzorců, tedy rozložení mnohočlenu na součin[126].

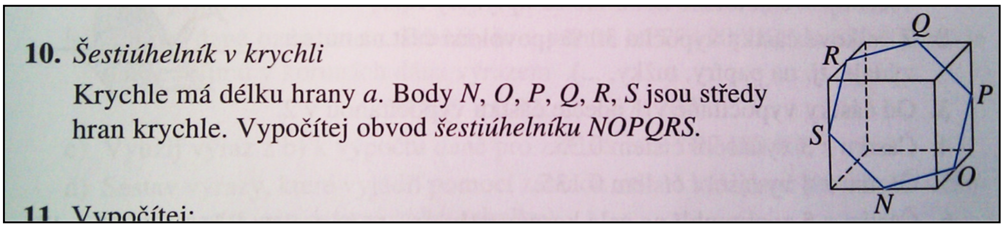
Zajímavá je i úloha s geometrickým kontextem, kde mají žáci porovnat výměru dvou pozemků, když první má tvar čtverce o straně délky x a druhý má tvar obdélníku, jehož jedna strana je o 30 m delší a druhá o 30 m kratší, než je strana čtverce[127].

Další zajímavé úlohy jsou v kapitole *Souhrnná cvičení*. Zde je například úloha[128], ve které mají žáci najít takové přirozené x a y, aby platilo: $x^y = y^x$; $x^y < y^x$; $x^y > y^x$.

[119] Odvárko 8, 1. díl, str. 78(6)
[120] Odvárko 8, 1. díl, str. 78(B)
[121] Odvárko 8, 1. díl, str. 79(10)
[122] Odvárko 8, 1. díl, str. 80(2), str. 82(14), str. 83(19)
[123] Odvárko 8, 1. díl, str. 80(3)
[124] Odvárko 8, 1. díl, str. 80(4)
[125] Odvárko 8, 1. díl, str. 81(8), str. 83(20), str. 81(9)
[126] Odvárko 8, 1. díl, str. 81(10), str. 82(16), (17), str. 83(18)
[127] Odvárko 8, 1. díl, str. 82(15)
[128] Odvárko 8, 1. díl, str. 84(4)

Nebo úlohy opět s geometrickým kontextem[129]:

- Pomocí výrazů obsahujících proměnnou x jsou zadány délky stran obdélníku a čtverce a žáci mají porovnat jejich obsahy a obvody.
- Na obrázcích jsou uvedeny pomocí proměnných p, s rozměry obrazců a žáci mají obecně vyjádřit obsahy a obvody vybarvených částí.
- Je dána krychle s délkou hrany a. Spojením středů šesti hran je vytvořen šestiúhelník a žáci mají vyjádřit jeho obvod (viz obrázek 28).



10. *Šestiúhelník v krychli*
Krychle má délku hrany a. Body N, O, P, Q, R, S jsou středy hran krychle. Vypočítej obvod *šestiúhelníku NOPQRS.*

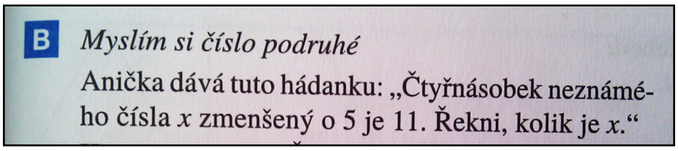
Obrázek 28

Druhý díl učebnice pro 8. ročník začíná opakováním znalostí o výrazech, kde autoři kladou důraz zejména na zápis výrazu podle slovního popisu[130] a na určování hodnoty výrazu pro zadané hodnoty proměnných[131].

Na to je navázáno v další části, kde je před žáky postavena úloha, v níž mají najít neznámé číslo, o němž jsou známy dvě informace. Na základě nich žáci sestaví jednoduchou rovnici, jejíž řešení hledají metodou pokus-omyl za pomoci tabulky, kam zapisují své odhady, a vyšetřují, zda se levá a pravá strana rovnice sobě rovnají[132]. Podobné úlohy na řešení tabulkou uzavírají dva barevné rámečky se shrnutím, co je rovnice s jednou neznámou, co znamená řešit rovnici a co znamená pojem kořen rovnice. Další část je věnována správnému provedení zkoušky, kterou si žáci na několika úlohách procvičují.

Ekvivalentní úpravy rovnic jsou zavedeny na dvou modelech. Prvním je schéma na základě příkladů typu „Myslím si číslo“ (obrázek 29), kde je názorně ukázáno, jak neznámé číslo najít logickým postupem (obrázek 30)[133].

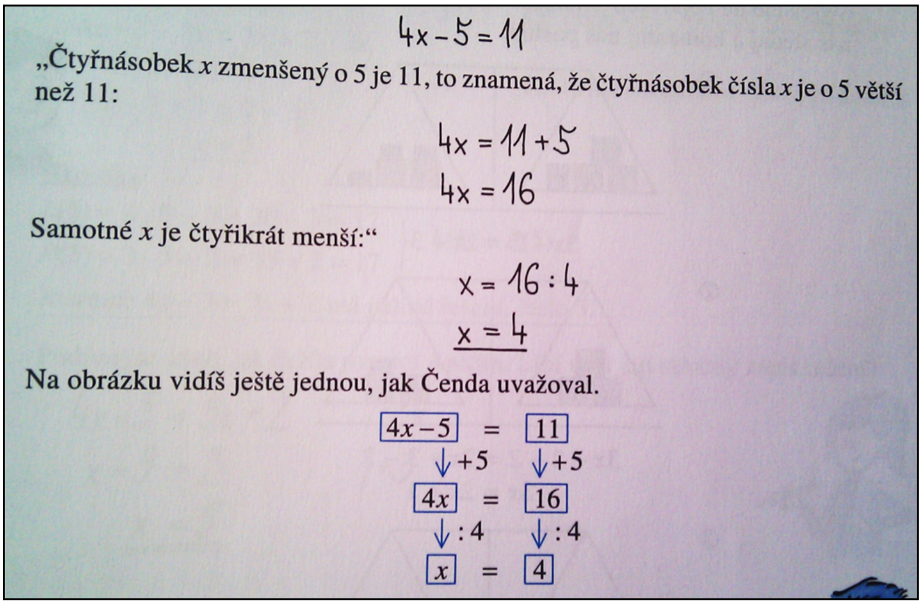
[129] Odvárko 8, 1. díl, str. 84(8), str. 85(9), str. 85(10)
[130] Odvárko 8, 2. díl, str. 3(3), str. 4(C), (6)
[131] Odvárko 8, 2. díl, str. 3(B), (4), str. 4(5), (C)
[132] Odvárko 8, 2. díl, str. 4(A), str. 5(1), (2), (3), (4), str. 6(5)
[133] Odvárko 8, 2. díl, str. 8(A), (B)



B *Myslím si číslo podruhé*

Anička dává tuto hádanku: „Čtyřnásobek neznámého čísla x zmenšený o 5 je 11. Řekni, kolik je x.“

Obrázek 29



$$4x - 5 = 11$$

„Čtyřnásobek x zmenšený o 5 je 11, to znamená, že čtyřnásobek čísla x je o 5 větší než 11:

$$4x = 11 + 5$$
$$4x = 16$$

Samotné x je čtyřikrát menší:“

$$x = 16 : 4$$
$$\underline{x = 4}$$

Na obrázku vidíš ještě jednou, jak Čenda uvažoval.

$$\boxed{4x-5} = \boxed{11}$$
$$\downarrow +5 \quad \downarrow +5$$
$$\boxed{4x} = \boxed{16}$$
$$\downarrow :4 \quad \downarrow :4$$
$$\boxed{x} = \boxed{4}$$

Obrázek 30

Druhým modelem jsou rovnoramenné váhy, kde každé rameno představuje jednu stranu rovnice. Aby byla váha v rovnováze, musí se na obou stranách provádět stejné operace. Následuje shrnutí v rámečku, které operace můžeme s rovnicí provádět, aby měla rovnice před úpravou i rovnice po úpravě stejné kořeny. Také zde autoři uvádějí vysvětlení pojmu ekvivalentní úprava rovnice.

Dále si žáci všechny poznatky procvičují na mnoha úlohách. Některé úlohy autoři lehce obměňují tím, že uvádějí postup řešení a žáci mají odhalit chyby, případně mají místo otazníků v postupu řešení dosadit správné výrazy.

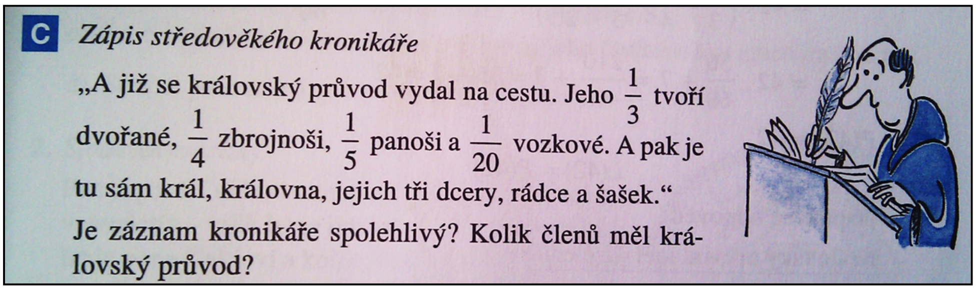
Celá druhá kapitola je věnována slovním úlohám, které lze řešit pomocí rovnic. Kromě návodu, jak postupovat, a několika řešených úloh se zde nachází i větší množství úloh na procvičení. Autoři záměrně zpočátku vybrali úlohy, u nichž je důležité provést zkoušku. Například velmi pěkná je úloha (na obrázku 31), která zdánlivě řešení má, nicméně nalezené kořeny rovnice nejsou z oboru přirozených čísel. Žáci jsou tak nabádaní k přemýšlení a důsledné interpretaci nalezených výsledků[134].

Na konci kapitoly je zařazeno i několik úloh na výpočet neznámé ze vzorce[135].

[134] Odvárko 8, 2. díl, str. 23(C)

[135] Odvárko 8, 2. díl, str. 33

Kapitola *Základy statistiky* proměnné téměř nevyužívá, dokonce ani při zavádění aritmetického průměru. Ten je zaveden pouze slovní formulací a na základě konkrétního příkladu. Písmena se vyskytují pouze ve formě označení neznámých, například při použití trojčlenky apod.


C **Zápis středověkého kronikáře**

„A již se královský průvod vydal na cestu. Jeho $\frac{1}{3}$ tvoří dvořané, $\frac{1}{4}$ zbrojnoši, $\frac{1}{5}$ panoši a $\frac{1}{20}$ vozkové. A pak je tu sám král, královna, jejich tři dcery, rádce a šašek."

Je záznam kronikáře spolehlivý? Kolik členů měl královský průvod?

Obrázek 31

Matematika pro 9. ročník

I v devátém ročníku je učivo rozděleno do tří učebnic. První díl[136] se věnuje lomeným výrazům, rovnicím a soustavám rovnic, čemuž odpovídají kapitoly *Lomené výrazy*, *Počítáme s lomenými výrazy*, *Souhrnná cvičení*, *Rovnice s neznámou ve jmenovateli*, *Soustavy rovnic* a *Souhrnná cvičení*. Druhý díl[137] učebnice obsahuje učivo o funkcích a částečně se věnuje geometrii. Kapitoly jsou řazeny takto: *Funkce*, *Lineární funkce*, *Ze světa nelineárních funkcí*, *Souhrnná cvičení*, *Podobnost*, *Goniometrické funkce*, *Souhrnná cvičení*. Třetí díl učebnice se zabývá geometrií a v poslední části dává nahlédnout do světa finanční matematiky.

První díl učebnice autoři zahajují opakováním mocnin a pravidel pro počítání s nimi, navazují opakováním mnohočlenů a operací s mnohočleny. Dále pokračují opakováním učiva o rovnicích. Poté autoři zařadili část věnovanou přípravě na lomené výrazy. Ta je zaměřena na dovednost určit, kdy se daný výraz rovná nule. V případě, že výraz obsahuje jednu proměnnou, používá se tvrzení, že součin $\boldsymbol{a \cdot b}$ je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden z činitelů $\boldsymbol{a}$ nebo $\boldsymbol{b}$ roven nule. V případě výrazu se dvěma proměnnými žáci hledají kořeny homogenní diofantovské rovnice.

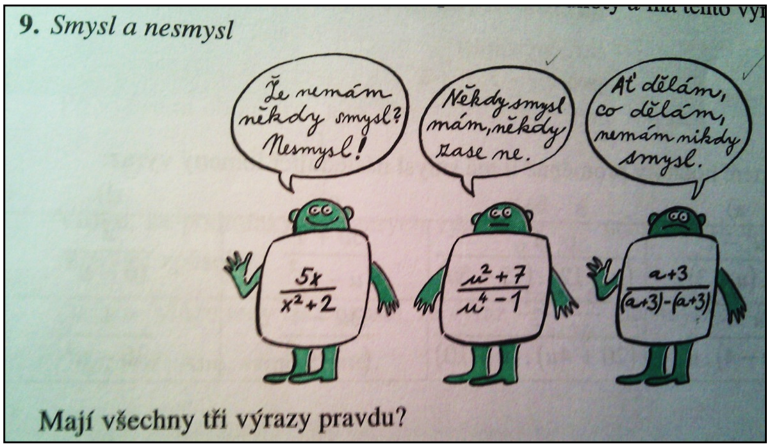
Pak již autoři zavádějí pojem lomený výraz. Žáci mají nejprve vypočítat hodnotu uvedeného lomeného výrazu pro dané hodnoty proměnné, potom mají zjistit, kdy se hodnota výrazu rovná nule, a nakonec mají určit, kdy se jmenovatel výrazu rovná nule, a tedy výraz nemá smysl. Následují úlohy na procvičení určování podmínek, kdy má výraz smysl a kdy ne. Na odlehčení je uvedena pěkná úloha[138] (viz obrázek 32).

---

[136] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 9. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

[137] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 9. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 91 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

[138] Odvárko 9, 1. díl, str. 17(9)



Obrázek 32

Kapitola *Počítáme s lomenými výrazy* se v první řadě zabývá krácením a rozšiřováním lomených výrazů. Podobně jako v učebnicích z nakladatelství Fraus i zde autoři odkazují na analogii s krácením a rozšiřováním zlomků se zdůrazněním nutnosti uvést podmínky.

V rámci procvičovacích úloh se objevují i takové, kde mají žáci doplnit na místo otazníku výraz tak, aby platila uvedená rovnost[139].

Sčítání a odčítání lomených výrazů je také zavedeno pomocí zlomků. Nejprve žáci zkouší sčítat lomené výrazy se stejným jmenovatelem, poté s různými jmenovateli. Zde je oproti učebnicím z nakladatelství Fraus uveden přehlednější postup sčítání, kdy mají žáci nejprve převést všechny lomené výrazy vhodným rozšířením na výrazy se stejnými jmenovateli a teprve poté je sečíst.

Za vhodné považuji zařazení úlohy označené nadpisem „Pro přemýšlivé", kde mají žáci doplnit mezi čtyři lomené výrazy znaménka plus a mínus tak, aby se výsledek výpočtu rovnal uvedenému výrazu[140].

Násobení lomených výrazů opět staví na analogii se zlomky. Kromě procvičovacích úloh se zde nacházejí i složitější úlohy typu[141]: Zapiš výraz, kterým když vynásobíš výraz $\frac{(5+a)}{a}$ $(a \neq 0)$, dostaneš výraz$-\frac{(5+a)}{a^2}$. Nebo diktát[142]: Vypočítej součin součtu a součinu výrazů x a $\frac{1}{x}(x \neq 0)$.

Ani u dělení lomených výrazů není opominuta podobnost s dělením zlomků. Nejprve je pozornost věnována pojmu převrácený výraz a až potom si žáci procvičují dělení výrazů. Zmíněny jsou i složené lomené výrazy, na jejichž procvičení je v učebnici uvedeno také několik úloh.

[139] Odvárko 9, 1. díl, str. 26(12), (13), (14), (15)
[140] Odvárko 9, 1. díl, str. 33(5)
[141] Odvárko 9, 1. díl, str. 38(12), (13)
[142] Odvárko 9, 1. díl, str. 38(15)

V souhrnných cvičeních je několik zajímavých typů úloh[143], které dále rozvíjejí tuto oblast (viz obrázky 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39).

3. *Kdo hledá, najde*

Urči lomený výraz, pro který platí zároveň tyto tři podmínky:

1. Jeho čitatel i jmenovatel je některý z výrazů
   $(n+4)^2$, $(n-4)^2$, n^2+4, n^2-4.
2. Má smysl pro všechna $n \neq 4$.
3. Jeho hodnota pro $n = 5$ je 21.

Obrázek 33

11. *Pro přemýšlivé*

Zjisti hodnoty proměnné x, pro které je hodnota výrazu $2 - \frac{9}{x}$ přirozené číslo.

Napovíme: Odhaduj a kontroluj dosazením do daného výrazu.

Obrázek 34

12. *Co na místo otazníku?*

Urči výraz, který patří na místo otazníku:

a) $\frac{d}{c} + ? = \frac{cd+3}{c^2}$ b) $\frac{1}{2c^2} \cdot ? = \frac{2}{d}$

Obrázek 35

13. *Pro přemýšlivé*

Víme, že $k + \frac{1}{k} = 4$. Zjisti, kolik je $k^2 + \frac{1}{k^2}$.

Napovíme: Využij vzorec pro $(A + B)^2$.

Obrázek 36

14. *Rovnají se?*

a) Vypočítej pro přirozené číslo $n = 2$ hodnotu součinu výrazů n a $\frac{n}{n-1}$ a hodnotu součtu těchto dvou výrazů. Porovnej obě získané hodnoty.

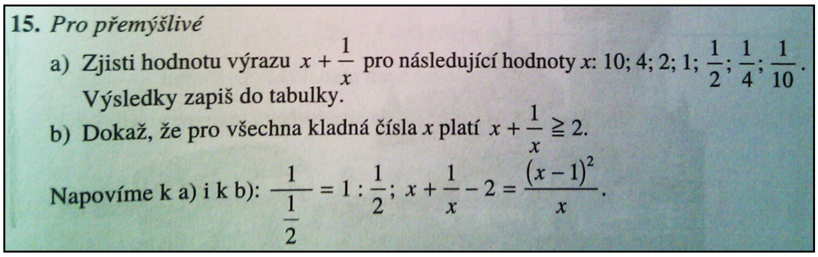
b) Přesvědč se, že i pro přirozená čísla $n = 3$, $n = 4$ a $n = 5$ je hodnota výrazu $n \cdot \frac{n}{n-1}$ rovna hodnotě výrazu $n + \frac{n}{n-1}$.

c) Myslíš si, že pro jakékoli přirozené číslo n větší než 1 se $n \cdot \frac{n}{n-1}$ rovná $n + \frac{n}{n-1}$? Zkus to dokázat!

Napovíme k c): Uprav oba výrazy a pak je porovnej.

Obrázek 37

[143] Odvárko 9, 1. díl, str. 45(3), str. 46(11), str. 46(12), str. 47(13), str. 47(14), str. 47(15), str. 47(16)



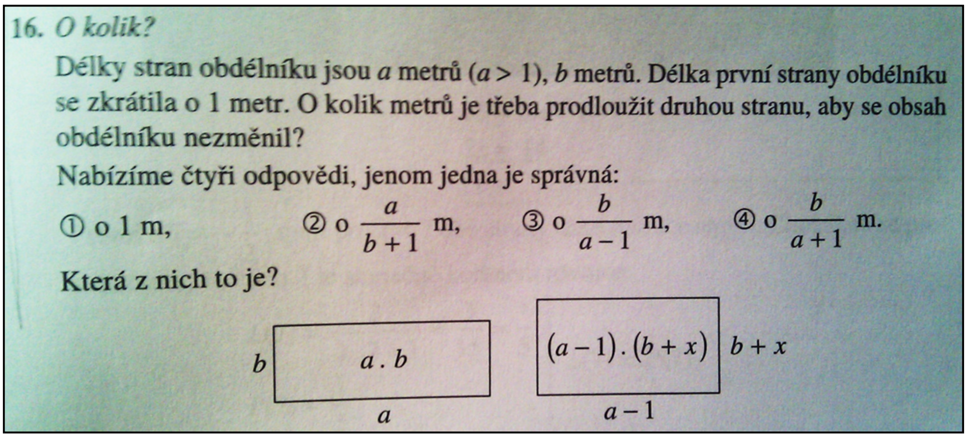
15. *Pro přemýšlivé*

a) Zjisti hodnotu výrazu $x + \frac{1}{x}$ pro následující hodnoty x: 10; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$.
Výsledky zapiš do tabulky.

b) Dokaž, že pro všechna kladná čísla x platí $x + \frac{1}{x} \geqq 2$.

Napovíme k a) i k b): $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2}$; $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$.

Obrázek 38



16. *O kolik?*

Délky stran obdélníku jsou a metrů ($a > 1$), b metrů. Délka první strany obdélníku se zkrátila o 1 metr. O kolik metrů je třeba prodloužit druhou stranu, aby se obsah obdélníku nezměnil?

Nabízíme čtyři odpovědi, jenom jedna je správná:

① o 1 m, ② o $\frac{a}{b+1}$ m, ③ o $\frac{b}{a-1}$ m, ④ o $\frac{b}{a+1}$ m.

Která z nich to je?

Obrázek 39

2.1.3 Řada učebnic z nakladatelství Nová škola (autoři Rosecká a kolektiv)

Učebnice z nakladatelství Nová škola jsou útlé svazky malého formátu, plné textů, barevných obrázků a tabulek. Autoři je zpracovali podle učebních dokumentů vzdělávacího programu Základní škola s důrazem na činnostní učení.

> „Činnostní výuka matematiky se opírá o aktivní a tvořivou činnost každého žáka a jeho samostatnou práci v celém vyučovacím procesu.“ (Rosecká, 2004)

Činnosti zařazené v učebnicích by tedy podle autorů měli vést žáky k tomu, aby nad nimi uvažovali, formulovali otázky, odpovídali na ně, a tak docházeli k závěrům.

Matematika pro 6. ročník

Učivo 6. ročníku autoři rozdělili do dvou učebnic, ke kterým vytvořili pracovní sešity na procvičování. První učebnice je označena Aritmetika 6[144] a patří k ní pracovní sešity Počtářské chvilky 6 a Aritmetika 6. Druhá učebnice s příslušnými pracovními sešity se věnuje geometrii. Učebnice Aritmetika 6 obsahuje kapitoly *Opakování*, *Desetinná čísla*, *Dělitelnost přirozených čísel* a opět *Opakování*.

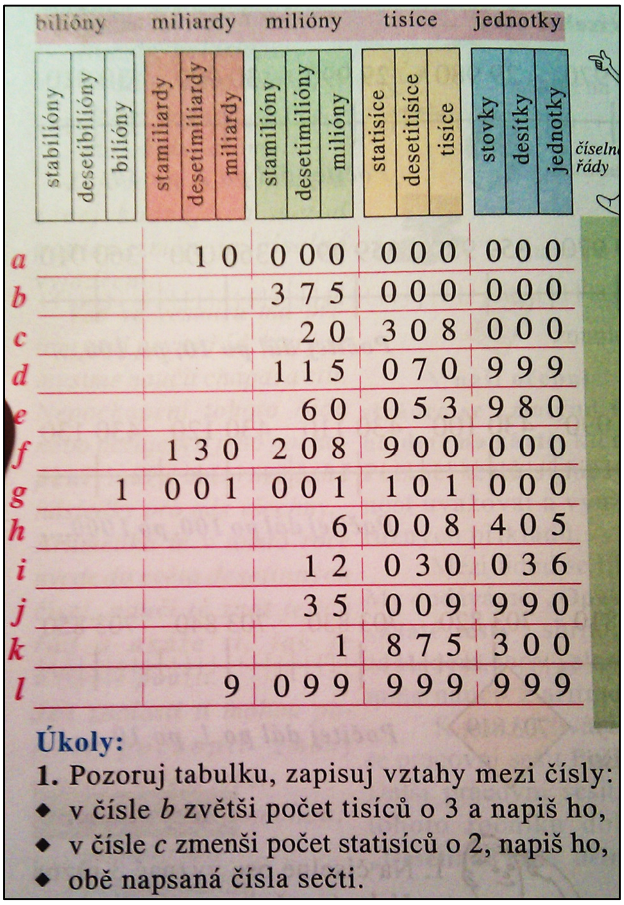
[144] ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 6. ročník*. Ilustrace Jiří Růžička. Brno: Nová škola, 1997, 85 s.

První výskyt písmene jsem zaznamenala hned na druhé stránce učebnice, ovšem v jiném kontextu, než u učebnic z nakladatelství Fraus nebo Odvárko. Autoři písmeny označují konkrétní čísla či výpočty[145], aby se jim na ně lépe odkazovalo v textu (viz obr. 40).

Podobně používají písmena i na dalších místech v některých cvičeních[146]. Dále také používají písmena na označování předmětů[147], jako zkratky číselných řádů[148] nebo jako zkratku slov Ano a Ne na vyjádření souhlasu či nesouhlasu s nějakým tvrzením. Dále jsou v učebnici použita písmena na označení řádků a sloupců tabulky (propedeutika souřadnic).

Písmena jako proměnné či neznámé se zde prakticky nevyskytují. Oproti učebnicím Odvárko, Kadleček se v této učebnici nepoužívá při zápisu slovních úloh k označení neznámé písmeno x, ale pouze otazník.

V učebnici se nicméně hojně vyskytují úlohy na zobecňování, pouze je vynechán poslední krok od konkrétního k obecnému[149].



	biliony	miliardy	miliony	tisíce	jednotky
	stabilióny, desetibilióny, bilióny	stamiliardy, desetimiliardy, miliardy	stamilióny, desetimilióny, milióny	statisíce, desetitisíce, tisíce	stovky, desítky, jednotky
a		10	000	000	000
b			375	000	000
c			20	308	000
d			115	070	999
e			60	053	980
f		130	208	900	000
g	1	001	001	101	000
h			6	008	405
i			12	030	036
j			35	009	990
k			1	875	300
l		9	099	999	999

Úkoly:

1. Pozoruj tabulku, zapisuj vztahy mezi čísly:
- v čísle *b* zvětši počet tisíců o 3 a napiš ho,
- v čísle *c* zmenši počet statisíců o 2, napiš ho,
- obě napsaná čísla sečti.

Obrázek 40

145 Aritmetika 6, str. 4 (Úkoly)
146 Aritmetika 6, str. str. 6 (1)
147 Aritmetika 6, str. 34 (4)
148 Aritmetika 6, str. 5 (1)
149 Aritmetika 6, str. 40 (1), str. 42 apod.

Matematika pro 7. ročník

Také v 7. ročníku autoři rozdělili učivo na dvě části, aritmetiku a geometrii. K učebnici Aritmetika 7[150] jsou vydány tři pracovní sešity: Počtářské chvilky 7, Aritmetika 7 (Slovní úlohy, trojčlenka) a Jak počítat s procenty.

Kromě opakování na začátku i na konci učebnice obsahuje Aritmetika 7 tyto kapitoly: *Zlomky*, *Celá čísla*, *Poměr. Přímá a nepřímá úměrnost*, *Procenta. Úroky*.

Oproti předchozímu ročníku se v této učebnici již objevují proměnné i neznámé v různých kontextech. Příklady použití proměnné:

- v záhlaví tabulky[151];
- při shrnutí pravidel pro operace se zlomky[152];
- při vyjádření podílu dvou čísel jako zlomku[153];
- ve vzorcích pro výpočet procentové části, základu nebo počtu procent[154];
- v úloze o stoupání na označení výšek a délek.[155]

V učebnici se také vyskytují úlohy na zobecňování s vynecháním posledního kroku (přechod od konkrétního k obecnému), zejména v části věnované přímé a nepřímé úměrnosti.

Příklady použití neznámé:

- v tajence (různá písmena)[156];
- v úloze pro označení délek stran obdélníku (písmena $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$);[157]
- ve slovních úlohách (jako $\boldsymbol{x}$);
- v trojčlence nebo úměře (jako $\boldsymbol{x}$).[158]

Autoři také používají písmena k označení čísel[159] nebo pro vyjádření souhlasu či nesouhlasu s nějakým tvrzením[160].

Matematika pro 8. ročník

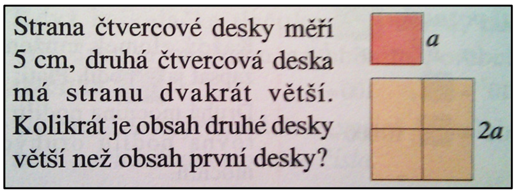
I v 8. ročníku autoři zachovali dělení učiva do dvou učebnic. K učebnici Algebra 8 jsou vytvořeny pracovní sešity Počtářské chvilky 8 a Řešení rovnic, slovní úlohy. Druhá učebnice se věnuje geometrii.

---

[150] ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Ilustrace Jiří Růžička. Brno: Nová škola, 1998, 86 s.
[151] Aritmetika 7, str. 7 (3b), str. 64
[152] Aritmetika 7, str. 29 (6)
[153] Aritmetika 7, str. 44
[154] Aritmetika 7, str. 71, 77 a 79
[155] Aritmetika 7, str. 80
[156] Aritmetika 7, str. 42 a 43 dole
[157] Aritmetika 7, str. 51
[158] Aritmetika 7, str. 61, str. 59
[159] Aritmetika 7, str. 6 (2b), str. 37
[160] Aritmetika 7, str. 11 (1)

Učebnice Algebra 8[161] zahrnuje kapitoly *Druhá mocnina a odmocnina*, *Mocniny s přirozeným mocnitelem*, *Početní výkony s mocninami*, *Výrazy s proměnnou*, *Mnohočleny*, *Lineární rovnice o jedné neznámé*, *Slovní úlohy řešené pomocí lineárních rovnic*, *Základy statistiky* a *Opakování*.

Autoři se již od prvních stran snaží o přesah do geometrie, například při zavádění druhé mocniny zmiňují pojem „čtverec čísla" a jeho geometrickou souvislost s mocninami[162]. Geometrické reprezentace aritmetických a algebraických vztahů se pak v učebnici objevují na mnoha místech. Zároveň s tím se objevují proměnné (a, b, c, d) v obrázcích geometrických útvarů, kde reprezentují délky stran. Autoři cvičí žákovy představy i pomocí některých úloh s geometrickým kontextem, například (viz obr. 41).[163]


Strana čtvercové desky měří 5 cm, druhá čtvercová deska má stranu dvakrát větší. Kolikrát je obsah druhé desky větší než obsah první desky?

Obrázek 41

Dále jsou proměnné používány v záhlavích tabulek (viz obr. 42)[164], do nichž mají žáci doplňovat například druhé mocniny čísel či hodnoty výrazů (aniž by věděli, že již počítají s výrazy).


1. Říkej zpaměti výsledky:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4						
n^2+1	2				26			
n^2-1	0						48	

Obrázek 42

Pomocí proměnných jsou také zapsány některé vzorce, například pro druhou mocninu a odmocninu součinu a podílu, nebo pro výpočet obvodů, obsahů, objemů a povrchů geometrických útvarů a těles. Zajímavým využitím písmen je početní šifra[165], kde žáci na základě několika výpočtů přiřazují k číselným výrazům písmena, která složí tajenku. Tyto šifry se v učebnici vyskytují často, žáci se tedy učí přiřazovat písmena k číselným hodnotám.

Autoři na několika místech učebnice použili písmena i jako zkratky předmětů (například[166] Slunce jako S, Země jako Z, Měsíc jako M nebo body jako b).

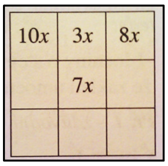
[161] ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 2010, 111 s.
[162] Algebra 8, str. 6
[163] Algebra 8, str. 10 (4), str. 16 (4)
[164] Algebra 8, str. 7, str. 10 (1), str. 16
[165] Algebra 8, str. 14, 15
[166] Algebra 8, str. 20

Na několika místech se také vyskytují přípravná cvičení na výuku rovnic, v nichž je neznámá obvykle reprezentována barevným obdélníčkem nebo jiným symbolem[167].

Autoři se v prvních dvou kapitolách snažili upevnit žákovské dovednosti práce s číselnými výrazy (případně s jejich geometrickou reprezentací). Třetí kapitolou s názvem *Početní výkony s mocninami* již začíná práce s výrazy s proměnnou, ačkoliv autoři tento pojem ještě nezavádějí.

Sčítání a odčítání mocnin ukazují pomocí rozepsání na součet stejných činitelů. Po straně je v modrém rámečku s názvem „Pozoruj a uvědom si" ukázáno sčítání na číselném výrazu, výrazech s proměnnou, a pak i v geometrickém kontextu na délkách úseček. Následují úlohy na procvičení sčítání a odčítání jednočlenů, které jsou doplněny dalšími úlohami, například s úkolem zapsat výrazem obvody nakreslených obrazců[168], jejichž délky stran jsou popsány proměnnými, nebo zapsat výraz (jednočlen) několika způsoby jako součet dvou výrazů (jednočlenů), či doplnit sčítací pyramidy obsahující jednočleny s proměnnou[169].

Násobení mocnin je zavedeno podobně jako sčítání pomocí rozepsání na součin stejných činitelů. V rámci procvičovacích úloh se zde opět odkazuje ke geometrii na grafické znázornění součinů jako obsahu čtverce či obdélníku. Dále jsou zařazeny i úlohy na propedeutiku rovnic a pro žáky jistě motivační úloha se šifrou na přiřazení písmen k výsledkům. Netradiční je i úloha s magickými čtverci, kde žáci doplňují do čtverce 9x9 výrazy tak, aby součet v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách byl stejný (viz obr. 43)[170]. U některých cvičení je pobídka, aby žáci zkusili vymyslet podobnou úlohu.



Obrázek 43

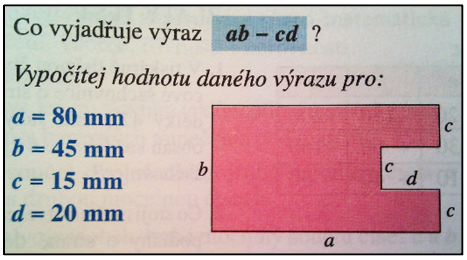
Při dělení mocnin autoři znázorňují podíl zlomkem a opět vycházejí z rozvinutého zápisu čitatele a jmenovatele pomocí součinu, kde mohou krátit. Tímto způsobem vyvozují všechny případy, které mohou při dělení mocnin nastat, včetně vztahu $x^0 = 1$ a významu záporné mocniny. Zajímavé ale je, že závěry nezapisují pomocí vzorců, jak je tomu zvykem v ostatních učebnicích.

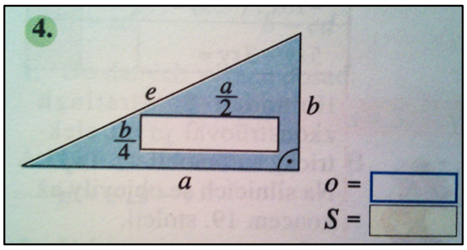
Vzorce na umocňování součinu, zlomku a mocniny opět odvozují pomocí rozepsání na součin na základě předchozích znalostí o mocninách.

[167] Algebra 8, str. 24 (5), str. 26, str. 28 (1), str. 29 (2), (4)
[168] Algebra 8, str. 26 (7)
[169] Algebra 8, str. 26
[170] Algebra 8, str. 29

Kapitolu *Výrazy s proměnnou* autoři zahajují vysvětlením a příklady, co jsou číselné výrazy, výrazy s proměnnou a co je hodnota výrazu s proměnnou. Hodnotu výrazu ukazují na příkladu obvodu čtverce se stranou délky a, kde doplňují do tabulky hodnoty výrazu $4a$ pro různé hodnoty proměnné a. Následně autoři zařadili několik úloh na procvičení určování hodnoty výrazu, ať už pomocí výpočtu nebo doplněním tabulky[171].

Jak již bylo řečeno výše, v učebnici je kladen velký důraz na geometrickou interpretaci výrazů. Proto je v učebnici ještě před zaváděním operací s výrazy zařazena část, v níž žáci pracují s délkami úseček (jsou značeny různými písmeny), které graficky sčítají a odčítají, a podobně pracují i s obsahy čtverců[172]. Kromě toho učebnice obsahuje i úlohy (viz obr. 44), kde mají žáci určit, co vyjadřuje zadaný výraz (geometricky)[173], přiřadit k výrazům příslušné obrázky útvarů[174], nebo vyjádřit obvod a obsah nakreslených útvarů (rozměry zadány pomocí proměnných)[175].





Obrázek 44

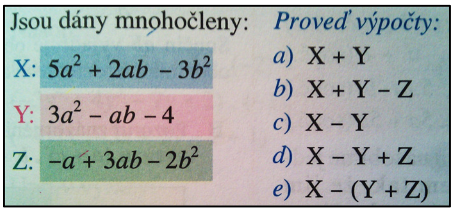
Dále autoři nezapomněli ani na úlohy, v nichž mají žáci procvičit zápis výrazů na základě slovního popisu, přiřadit text k výrazu nebo slovy popsat zadaný výraz[176]. Zajímavá je i slovní úloha, k níž mají žáci nejprve dopsat mnohočlen, a pak analogicky k jinému mnohočlenu vymyslet slovní úlohu[177].

Sčítání a odčítání mnohočlenů[178] se v učebnici zavádí ve dvou krocích. Nejprve se žáci seznamují se sčítáním a odčítáním jednočlenů za pomoci obrázků třešní a banánů. Posléze je zavedeno sčítání mnohočlenů, které žáci v podstatě již umí, jen je jim ukázáno, jak se odstraní závorka. Odčítání

[171] Algebra 8, str. 36, str. 37 (1), str. 40
[172] Algebra 8, str. 38, str. 39
[173] Algebra 8, str. 39 (1), (2), (3)
[174] Algebra 8, str. 39
[175] Algebra 8, str. 42
[176] Algebra 8, str. 41, str. 42
[177] Algebra 8, str. 45
[178] Algebra 8, str. 48, str. 49

mnohočlenů autoři prezentují jako přičítání opačného mnohočlenu. Za vhodné považuji i zařazení zkoušky správnosti úpravy, kdy mají žáci pro zvolené hodnoty proměnných zkusit, zda se hodnota původního i upraveného výrazu rovná. Obě operace jsou tedy zavedeny algebraicky, přesto autoři na další straně uvedli i geometrickou interpretaci sčítání a odčítání pomocí úseček.

V rámci procvičování obsahuje učebnice například úlohy s magickými čtverci, které obsahují dvojčleny[179] (žáci se mají přesvědčit, zda jsou uvedené čtverce magické), nebo mají žáci podle slovního popisu sestavit mnohočlen a upravit ho. Také se zde vyskytuje úloha připomínající substituci (viz obr. 45).[180]


Jsou dány mnohočleny:

X: $5a^2 + 2ab - 3b^2$

Y: $3a^2 - ab - 4$

Z: $-a + 3ab - 2b^2$

Proveď výpočty:

a) X + Y

b) X + Y − Z

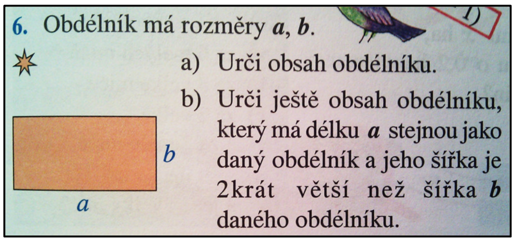
c) X − Y

d) X − Y + Z

e) X − (Y + Z)

Obrázek 45

Násobení mnohočlenů se zavádí (podobně jako v řadě učebnic autorů Odvárko, Kadleček) postupně v několika krocích. Nejdříve je uvedeno násobení mnohočlenu jednočlenem, které je odvozeno v rámci řešené slovní úlohy, kde je výsledek zřejmý, a poté geometricky pomocí obsahu obdélníku[181]. Mezi procvičovacími úlohami opět vyniká jedna geometrická (viz obr. 46).[182]


6. Obdélník má rozměry ***a***, ***b***.

a) Urči obsah obdélníku.

b) Urči ještě obsah obdélníku, který má délku ***a*** stejnou jako daný obdélník a jeho šířka je 2krát větší než šířka ***b*** daného obdélníku.

Obrázek 46

Na násobení mnohočlenu jednočlenem navázali autoři s vytýkáním jednočlenu před závorku. Na třech příkladech ukázali, že se jedná o opačný postup k násobení. I zde se objevily geometrické úlohy. Například úloha, kde mají žáci z dvojčlenů vyjadřujících povrchy geometrických těles vytknout společného činitele[183]. Kontrolou správnosti jim může být srovnání s modely v praxi. Nebo úloha, kde mají žáci výrazem zapsat délku strany nějakého geometrického útvaru, když znají výraz vyjadřující jeho obvod[184]. Násobit mnohočlen mnohočlenem se pak žáci učí geometricky přes obsahy obdélníků.

[179] Algebra 8, str. 49
[180] Algebra 8, str. 51 (2)
[181] Algebra 8, str. 52
[182] Algebra 8, str. 53 (6)
[183] Algebra 8, str. 57 (2)
[184] Algebra 8, str. 58 (5)

Vzorce $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)\cdot(a-b)$ jsou v učebnici odvozeny algebraicky pomocí násobení, u prvního a posledního je navíc ukázáno i odvození na geometrickém modelu přes obsah čtverce a obdélníku[185]. Mezi úlohami na procvičení mě opět zaujaly dvě geometrické. V první mají žáci rozhodnout, zda mají dva vybarvené obrazce stejný obsah[186], ve druhé mají žáci sestrojit obdélník, který bude mít stejný obsah jako obsah vybarvené plochy útvaru na obrázku[187].

První výskyt pojmu lineární rovnice je v poněkud zvláštní souvislosti. Uprostřed strany autoři totiž uvádějí vysvětlení, že lineární rovnice je algebraická rovnice 1. stupně. Pod tím je uveden obecný tvar lineární rovnice a dva příklady[188].

Další text ale pokračuje v duchu celé učebnice vysvětlením potřebných pojmů a pomalým seznámením s problematikou rovnic. Žáci například mají porovnat uvedené číselné výrazy a vložit mezi ně znaky nerovnosti či rovnítko, nebo mají zjistit, pro která z čísel jsou si hodnoty dvou výrazů s proměnnou rovny[189]. Ekvivalentní úpravy rovnic jsou zaváděny zkoušením, zda se při přičtení/odečtení/vynásobení /vydělení číslem od obou stran rovnice nezmění kořen (při sčítání a odčítání je uveden model vah). Autoři zdůrazňují i význam zkoušky. Následují různé procvičovací úlohy, kde autoři obměňují písmena reprezentující neznámé. Zajímavější úlohy se vyskytují ke konci kapitoly, kde žáci opět pracují s magickými čtverci[190]. Zařazeny jsou i úlohy, v nichž žáci slovy popisují rovnici nebo zapisují rovnici podle slovního popisu[191].

Učebnice obsahuje i dvě strany, které jsou věnovány výpočtu neznámé ze vzorce[192]. Na řešených příkladech z geometrie jsou ukázány případy, kdy mají žáci zadány některé údaje a mají vyjádřit hodnotu jedné zbývající veličiny. Ve sloupci na okraji stránek je pod označením „Rozšiřující učivo" také na několika fyzikálních vzorcích ukázáno, jak se vyjadřuje neznámá ze vzorce bez dosazení konkrétních hodnot za ostatní veličiny.

Kapitolu *Slovní úlohy* zahajuje cvičení na úsudky obsahující proměnnou. V nich je vždy slovy popsána situace a žáci ji mají popsat výrazem. Součástí cvičení je i úloha vedoucí k zobecňování[193]. Dále jsou zařazeny úlohy, které jsou vyřešené, a to dvěma způsoby - pomocí úsudku i jednoduchou rovnicí. Následují slovní úlohy na řešení rovnicí. V rámci nich jsou zařazeny i úlohy s geometrickými náměty[194].

[185] Algebra 8, str. 64
[186] Algebra 8, str. 65 (5)
[187] Algebra 8, str. 65 (6)
[188] Algebra 8, str. 67
[189] Algebra 8, str. 69 (2)
[190] Algebra 8, str. 79
[191] Algebra 8, str. 82
[192] Algebra 8, str. 83 a 84
[193] Algebra 8, str. 85 (9)
[194] Algebra 8, str. 90, str. 91

Autoři se používání proměnných nevyhýbají ani v dalších kapitolách. Oproti jiným řadám učebnic používají písmena i v kapitole Základy statistiky[195] například k označení základních pojmů (n - počet prvků, x - hodnota znaku, f - četnost znaku, $\bar{x}$ - aritmetický průměr) nebo ve vzorcích na výpočet relativní četnosti znaku či aritmetického průměru.

Matematika pro 9. ročník

V 9. ročníku jsou k dispozici opět dvě učebnice: Algebra 9 a Geometrie 9. K učebnici algebry patří ještě pracovní sešity Chvilky s algebrou a Rovnice a slovní úlohy 2. Učebnice Algebra 9[196] navazuje na předchozí ročník s kapitolami *Opakování*, *Lomené výrazy*, *Lineární rovnice*, *Slovní úlohy*, *Funkce* a *Základy finanční matematiky*.

Na začátku učebnice žáci opakují své znalosti o výrazech s proměnnou, zkoušejí je rozkládat na součin a určují jejich hodnotu. Mezi úlohami s výrazy jsou začleněna cvičení na opakování práce se zlomky.

Lomené výrazy autoři zavádějí postupně. Nejprve uvádějí jednoduché výrazy, které mají proměnnou ve jmenovateli, a žáci doplňováním do tabulek zkoušejí počítat hodnoty těchto výrazů a určovat, kdy výraz nemá smysl. Následuje ukázka, kde všude se s lomenými výrazy žáci mohou potkat, a vysvětlení samotného pojmu lomený výraz. Potom žáci na mnoha úlohách procvičují určování podmínek, za kterých má daný výraz smysl, a určování hodnoty výrazu pro zadané hodnoty proměnných. Mezi těmito úlohami se objevují i úlohy na určení hodnoty proměnné, při které se výraz rovná nule. I v této učebnici lze nalézt přesah do geometrie, příkladem je úloha, kde je žákům předložen vzorec pro výpočet velikosti vnitřních úhlů pravidelných mnohoúhelníků, a žáci mají vypočítat velikost vnitřních úhlů pro rovnostranný trojúhelník, čtverec… až po pravidelný 9úhelník.

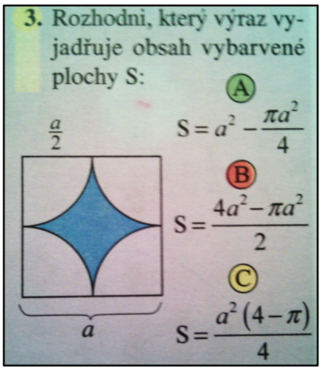
Krácení lomených výrazů autoři ukazují na řešeném příkladu, kde poskytují návod pro další podobné úlohy. Následující úlohy potom ale neslouží k slepému procvičení této dovednosti, více se zaměřují na rozhodování žáků, zda lze uvedené výrazy upravit krácením. Příkladem jsou úlohy, kde mají žáci rozhodnout, které z uvedených výrazů mohou být zjednodušeny, nebo mají doplnit mezi dvojice výrazů, které se sobě rovnají, znak „=". Žáci také mají určit, který z výrazů se bude po krácení rovnat konkrétnímu číslu (např. $\frac{1}{2}$, 1, -1), nebo rozhodnout o pravdivosti tvrzení o lomených výrazech.

Rozšiřování lomených výrazů je také zavedeno pomocí řešených příkladů. Zajímavá je k tomuto tématu zařazená geometrická úloha na obr. 47.[197]

[195] Algebra 8, str. 97

[196] ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000, 111 s.

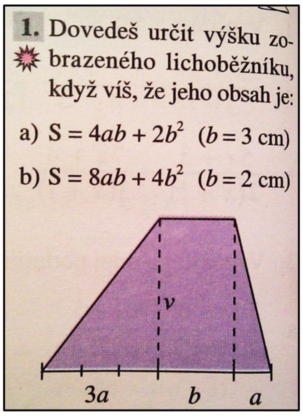
[197] Algebra 9, str. 21 (3)



Obrázek 47

Sčítání a odčítání lomených výrazů je zavedeno pomocí zlomků. Žáci si nejprve osvěžují, jak se sčítají zlomky, a na základě toho zkouší sčítat zlomky s proměnnou v čitateli. Jak se dostane proměnná do jmenovatele je ukázáno zobecněním „dělení koláče" na 4, 8 a x shodných dílů. Na tomto modelu je graficky ukázáno, jak se jednotlivé dílky sčítají. Následují úlohy na procvičení.

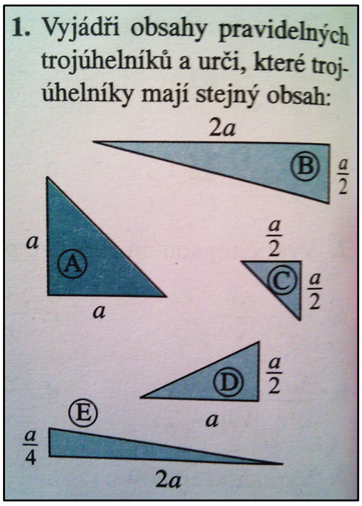
Násobení a dělení je opět nejprve zopakováno na zlomcích a na výrazech s proměnnou v čitateli. To je potom zobecněno na lomených výrazech. V této části jsou zařazeny i různé geometrické úlohy, například na obr. 48[198] nebo na obr. 49[199].



Obrázek 48

Ke konci obsahuje kapitola *Lomené výrazy* několik slovních úloh, v nichž mají žáci zapsat vztahy mezi proměnnými výrazem. Také tato řada učebnic věnovala jednu stranu složeným lomeným výrazům, na níž uvedla vysvětlení pojmu složený lomený výraz, dále postup, jak takový výraz upravit, a několik úloh na procvičení.

[198] Algebra 9, str. 26 (1), (2), (3)
[199] Algebra 9, str. 30 (1), (2), (3)



Obrázek 49

2.1.4 Shrnutí analýzy učebnic

V analýze učebnic jsem detailněji popsala řadu učebnic pro 2. stupeň ZŠ z nakladatelství Fraus (autoři Binterová, Fuchs, Tlustý), řadu učebnic z nakladatelství Prometheus (autoři Odvárko, Kadleček), řadu učebnic z nakladatelství Nová škola (autoři Rosecká a kolektiv).

Pojem proměnná

Pro 6. a 7. ročník se z hlediska výuky pojmu proměnná na první pohled jeví jako vhodnější řada učebnic z nakladatelství Fraus nebo z nakladatelství Nová škola, protože se v ní žáci seznamují s písmeny v různých kontextech a ve formě proměnných i neznámých. Příkladem použití písmen v řadě učebnic nakladatelství Fraus jsou (není řazeno podle četnosti):

- proměnné v záhlavích tabulek;
- vzorce pro výpočet obsahů, obvodů geometrických útvarů;
- definice a tvrzení;
- úlohy, v nichž se přímo pracuje s proměnnou (lze řešit úvahou);
- úlohy na zobecňování;
- různé fyzikální a chemické vzorce;
- neznámá v trojčlence;
- předpis pro přímou a nepřímou úměrnost.

Podobně je na tom i řada učebnic z nakladatelství Nová škola, kde se písmena vyskytují například v těchto souvislostech (není řazeno dle četnosti):

- v záhlaví tabulky;
- definice a tvrzení;
- ve vzorcích (např. pro výpočet procentové části);

- úlohy, v nichž se přímo pracuje s proměnnou;
- v tajence (různá písmena představují neznámé);
- ve slovních úlohách, v trojčlence nebo úměře k označení neznámé (jako x);
- na označování čísel, výpočtů nebo předmětů, jako zkratky číselných řádů;
- na označení řádků a sloupců tabulky (propedeutika souřadnic).

Řada učebnic z nakladatelství Prometheus nejčastěji používá písmena k označování neznámých. Příklady použití písmen (není řazeno podle četnosti):

- jednoduché rovnice a nerovnice s neznámou x (těchto úloh je v učebnicích většina);
- grafické úlohy s označením neznámých délek stran útvarů písmeny;
- označení neznámé v řešených úlohách, přestože jsou následně úlohy řešeny aritmeticky;
- neznámá v trojčlence;
- definice a tvrzení;
- vzorec pro výpočet objemu kvádru;
- předpis pro přímou a nepřímou úměrnost;

Oproti učebnicím z nakladatelství Fraus a Nová škola se v učebnicích autorů Odvárko, Kadleček prakticky nevyskytují úlohy, kde by se žáci mohli setkat s proměnnou v záhlaví tabulky. Výjimkou je kapitola *Přímá a nepřímá úměrnost*, kde se tabulky využívají pro zápis úměrností. Také se v této řadě učebnic nevyskytují úlohy, kde by žáci přímo pracovali s proměnnou. Nejvíce jsou v učebnicích autorů Odvárko, Kadleček pro 6. a 7. ročník zastoupeny úlohy na řešení jednoduchých rovnic s označením neznámé písmenem x.

Dalším nepříliš pozitivním jevem v řadě učebnic autorů Odvárko, Kadleček jsou velké skoky v úrovni používání proměnných mezi ročníky i mezi některými kapitolami v rámci jedné učebnice. Například v učebnici pro 7. ročník autoři v kapitole Přímá a nepřímá úměrnost bez velkých úvodů rovnou přistupují k používání pojmu proměnná a k popisu úměrností pomocí písmen, aniž by vzali v úvahu, že se žáci v rámci učebnice setkávali hlavně s písmenem x reprezentujícím neznámou, a že s proměnnou tedy nemají zkušenosti.

Učebnice z nakladatelství Fraus jsou sice v tomto směru více jednotné a jednotlivé kapitoly na sebe s ohledem na úroveň používání proměnných navazují, nicméně zase neobsahují takové množství úloh, jako učebnice z nakladatelství Prometheus nebo Nová škola. Žáci i učitelé tedy stejně musí doplňovat materiály z jiných zdrojů.

Z tohoto srovnání tedy zdánlivě nejlépe vychází řada učebnic z nakladatelství Nová škola, která používání písmen zařazuje plynule, a navíc k ní jsou vydány pracovní sešity s dalšími úlohami na procvičení. Nevýhodou této řady učebnic je ale používání písmen jako zkratek a na označování předmětů (viz oddíl 2.3.2).

Algebraické výrazy

Přístup k výuce algebraických výrazů je z hlediska srovnání přístupů jednotlivých řad učebnic více diskutabilní. Všechny tři řady mají zařazen tematický celek algebraické výrazy do učebnic pro 8. ročník, lomené výrazy potom do učebnic pro 9. ročník.

Autoři řady učebnic z nakladatelství Fraus si dávají záležet na tom, aby písmena „nepadala žákům z nebe", vše nejprve ukazují a procvičují s konkrétními čísly a až poté shrnutí zapisují pomocí proměnných. Také se snaží stavět novou látku na tom, co již žáci znají. Ve stejném duchu tedy přistupují i k výuce algebraických výrazů. Nejprve (po propedeutice pojmu proměnná z učebnic minulých ročníků) pracují s číselnými výrazy a odtud na základě předchozích znalostí a zkušeností žáků se známými příklady přecházejí na vysvětlení pojmů číselné výrazy a výrazy s proměnnou. Následuje tato posloupnost žákovských činností:

- manipulace s výrazy s proměnnou geometricky (délky úseček, obsah obdélníku);
- úlohy na zobecňování;
- tvorba výrazu dle slovního popisu;
- práce s hodnotou výrazu (upravují operace ve výrazech tak, aby měl konkrétní hodnotu);
- určování hodnoty výrazu;
- hledání výrazu ke kontextu a kontext k výrazu.

Ani v učebnici z nakladatelství Nová škola se přístup příliš neliší. Autoři se snaží nové poznatky odvozovat na základě toho, co již žáci vědí, případně ukazovat v prostředích, které žáci dobře znají. V případě algebraických výrazů si autoři často vypomáhají geometrickou reprezentací, na které ukazují význam algebraicky vyjádřených vztahů. Odvozené vztahy žáci procvičují na velkém množství úloh, jejichž složení odpovídá zvolené kombinaci algebraického i geometrického pohledu na problém.

Naproti tomu v učebnicích z nakladatelství Prometheus není propedeutika proměnné příliš propracovaná. Navíc jsou mezi jednotlivými ročníky i mezi některými kapitolami v rámci jedné učebnice velké skoky v úrovni používání proměnných, jak již bylo zmíněno výše. V učebnici pro 8. ročník například autoři již běžně pracují s proměnnou při zavádění nových pojmů a vlastností, ale jinak není první kapitola učebnice co do využití písmen příliš pestrá. Zarážející je i nevyužití potenciálu některých úloh, kde je například v úloze na výpočet BMI místo vzorce, na kterém by žáci mohli procvičit dosazování za proměnnou, uveden pouze slovní návod, jak BMI vypočítat. Nebo při zavádění aritmetického průměru na konci učebnice také není uveden zápis pomocí proměnných, pouze je popsán slovy a ukázán příklad výpočtu. Za to se v učebnici začínají objevovat poměrně obtížné úlohy, v nichž mají žáci rozhodnout o platnosti nějakého tvrzení obsahujícím proměnné, nebo platnost nějakého takového tvrzení zdůvodnit (dokázat).

K samotné části učebnice věnované výrazům s proměnnými přistupují autoři Odvárko, Kadleček značně instruktivisticky. Bez úvodu a vysvětlení, co to vlastně výraz s proměnnou je, rovnou na začátek zařadili poměrně náročnou slovní úlohu, jejímž úkolem je vytvořit vzorec na výpočet ceny zájezdu pro obecný počet dospělých a dětí. Úloha je uvedena s řešením a vysvětlením, přesto působí složitě. Poté je v rámečku nabídnut návod a pod ním následují úlohy, na nichž si mají žáci tuto látku procvičit. V rámci kapitoly jsou pak ale žákům nabídnuty různé zajímavé a podnětné úlohy. Oproti učebnici z nakladatelství Fraus tato řada k tomuto tematickému celku opět nabízí více úloh. Jsou to například úlohy na zobecňování; úlohy na přiřazení správného výrazu ke kontextu slovní úlohy; úlohy, kde mají žáci zapsat slovně zadaný výraz; úlohy na výpočet z fyzikálních vzorců; geometrické úlohy na odvození vzorců pro výpočet např. délky úhlopříčky ve čtverci; úlohy na sestavení vzorce z kontextu slovní úlohy.

Operace s mnohočleny zavádějí autoři jednotlivých řad učebnic takto (srovnání uvedeno v tabulce 2):

Tabulka 2: Zavádění operací s mnohočleny

	Řada učebnic nakladatelství Fraus	Řada učebnic nakladatelství Prometheus	Řada učebnic nakladatelství Nová škola
Sčítání a odčítání mnohočlenů	sled výrazů od číselných přes obrázky předmětů (jablka a hrušky) po výrazy s proměnnou	pomocí povrchu dvou kvádrů s hranami označenými písmeny Pozn. Žáci ještě neumí sečíst jednočleny.	zavedeny algebraicky, uvedena i geometrická reprezentace (sčítání a odčítání úseček) 1. sčítání a odčítání jednočlenů za pomoci obrázků třešní a banánů 2. sčítání mnohočlenů - jen ukázáno odstranění závorky 3. odčítání mnohočlenů jako přičítání opačného mnohočlenu
Násobení mnohočlenů	přes obsahy obdélníků s délkami stran označených proměnnými	Instruktivisticky – ukázka výpočtu, procvičování 1. jednočlen jednočlenem 2. mnohočlen jednočlenem 3. mnohočlen mnohočlenem (podpořeno vzorcem)	geometricky přes obsahy obdélníků Mnohočlen jednočlenem ještě za podpory slovní úlohy se zřejmým výsledkem
Vytýkání	zkoumání dělitelnosti mnohočlenů, pak tabulka s násobením mnohočlenů jako opačnou operací k vytýkání	Instruktivisticky – ukázka, procvičování Rozklad na součin přes příklady rovností, které žáci ověřují roznásobením	po násobení mnohočlenů jednočlenem jako opačnou operaci
Vzorce	geometricky přes obsahy čtverců, potom algebraické ověření násobením	Instruktivisticky – ukázka roznásobením, vyvození závěru, procvičování	algebraicky roznásobením i geometricky přes obsahy

Ve dvou řadách se jako problematické ukázalo zavádění sčítání a odčítání mnohočlenů. Řada učebnic z nakladatelství Fraus k tomu přistupuje pomocí sledu výrazů od číselných přes obrázky hrušek a jablek po výrazy s proměnnými. Zde je ale diskutabilní využití obrázků jablek a hrušek jako pomůcky zastupující proměnné, jak ukázal výzkum (viz oddíl 2.3.2). V řadě učebnic nakladatelství Prometheus zase autoři příliš neřeší, že žáci ještě neumí sčítat jednočleny, a předpokládají, že je pro ně sčítání intuitivní.

Lomené výrazy

Všechny tři řady učebnic staví na znalostech o výrazech, které žáci získali v předchozím ročníku. Nicméně řada učebnic z nakladatelství Fraus věnuje před samotným zavedením lomených výrazů pravděpodobně nejvíce času opakování porozumění výrazům s proměnnou na různých typech úloh. Řada učebnic z nakladatelství Nová škola opakuje zejména operace s výrazy a určování jejich hodnoty. Učebnice autorů Odvárko, Kadleček, se zaměřili spíše na jednostrannou (přestože důležitou) dovednost určit, kdy se daný výraz s proměnnou rovná nule.

Samotné lomené výrazy autoři učebnic z nakladatelství Fraus před žáky konstruují ze známých výrazů s proměnnou a poukazují na podobnost se zlomky. Následně je žákům předložena definice lomených výrazů a vysvětlení, proč se u lomených výrazů musí určovat podmínky, za kterých mají výrazy smysl. Potom mají žáci možnost si na několika úlohách ujasnit, zda tomu rozumí.

V řadě učebnic z nakladatelství Nová škola zavádějí autoři pojem lomený výraz postupně. Nejprve žáci dostávají úlohy, v nichž pracují s jednoduchými lomenými výrazy a doplňováním do tabulek zkoušejí počítat hodnoty těchto výrazů, případně určují, kdy výraz nemá smysl. Potom je jim ukázáno, kde se s lomenými výrazy mohou potkat, a následuje vysvětlení samotného pojmu lomený výraz.

V učebnicích nakladatelství Prometheus je pojem lomený výraz prostě ukázán na příkladu a žáci s ním potom pracují – počítají hodnotu uvedeného lomeného výrazu pro zadané hodnoty proměnné, potom zjišťují, kdy se hodnota výrazu rovná nule a kdy se jmenovatel výrazu rovná nule a tedy výraz nemá smysl. Dále jsou zařazeny úlohy na procvičení určování podmínek.

Ve všech třech řadách učebnic se operace s lomenými výrazy zavádějí přes analogii se zlomky. Přesto autoři učebnice z nakladatelství Fraus příliš nezvládli zavedení sčítání lomených výrazů, kde uvedli sice správný, ale z didaktického hlediska naprosto nevhodný „vzorec" či schéma, které popisuje všechny kroky sčítání najednou (převedení na společného jmenovatele i sečtení čitatelů), což může vést u žáků k nepochopení podstaty a k formalismům. Naproti tomu autoři učebnic z nakladatelství Prometheus i z Nové školy uvádějí přehlednější postup sčítání, kdy mají žáci nejprve převést všechny lomené výrazy vhodným rozšířením na výrazy se stejnými jmenovateli a teprve poté je sečíst.

V učebnicích z nakladatelství Fraus a v učebnicích z nakladatelství Nová škola navíc kladně hodnotím výskyt úlohy, kde mají žáci vytvořit slovní úlohu k danému výrazu. Škoda jen, že je výskyt tohoto typu úloh ojedinělý.

2.2 TIMSS

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)[200] je mezinárodní výzkum, který se zaměřuje na zjišťování úrovně školních znalostí a dovedností v matematice a v přírodovědných předmětech u žáků 4. a 8. ročníků základního vzdělávání a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Jedná se o jeden z projektů Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), který je v ČR realizován Českou školní inspekcí. Výzkum TIMSS navazuje na předchozí mezinárodní výzkumy matematického a přírodovědného vzdělávání, které byly ve světě realizovány již od 50. let minulého století. Probíhá každé čtyři roky již od roku 1995. Česká republika se do něj zapojila v letech 1995, 1999, 2007 a 2011. V roce 1995 byly u nás testovány obě věkové kategorie, v roce 1999 jen žáci 8. ročníků ZŠ (a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií), v roce 2007 opět oba ročníky a v roce 2011 pouze žáci 4. ročníků.

2.2.1 Vyhodnocování

Výsledky testování jsou zkoumány ze dvou pohledů. Jednak se hodnotí zvládnutí učiva, které přísluší danému ročníku, za druhé výzkum zjišťuje úroveň dovedností, které mají žáci při práci s učivem prokázat. Vzhledem k povaze mé diplomové práce dále uvádím pouze informace týkající se 8. ročníků v matematické části testování TIMSS.

Oblasti učiva sledované ve výzkumu TIMSS 2007:

- čísla
- algebra
- geometrie
- data a pravděpodobnost

Dovednosti sledované ve výzkumu TIMSS 2007:

- prokazování znalostí
- používání znalostí
- uvažování

Výsledky testování jsou prezentovány dvěma způsoby. Jednak se uvádí úspěšnost žáků pomocí bodové stupnice, která se využívá jak u jednotlivých dílčích oblastí, tak při celkovém hodnocení úspěšnosti žáků. Druhým způsobem prezentace výsledků testování je rozdělení žáků do čtyř vědomostních úrovní. Každá úroveň je určena minimálním počtem bodů, jehož musí žák dosáhnout. Výsledky zemí jsou pak vyjádřeny procentuálním zastoupením jejich žáků na jednotlivých vědomostních úrovních. Žáci na

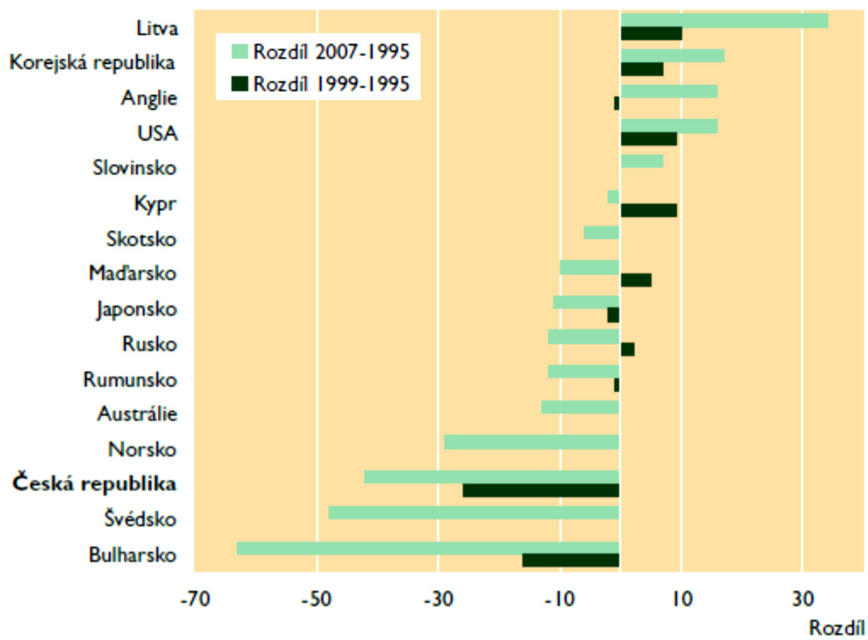
[200] http://timss.bc.edu/

nejnižší úrovni 1 (od 400 bodů) prokázali pouze některé elementární matematické znalosti. Na úrovni 2 (od 475 bodů) dokáží žáci aplikovat základní matematické znalosti na jednoduché situace. Žáci na úrovni 3 (od 550 bodů) dokáží své vědomosti a dovednosti uplatnit při řešení relativně složitějších problémů. Na nejvyšší úrovni 4 (od 625 bodů) řeší žáci složité úlohy, vyvozují závěry a své myšlenkové postupy dokáží zdůvodnit. (Tomášek, 2008)

2.2.2 Výsledky českých žáků 8. ročníků v matematice

Žáci 8. ročníku povinné školní docházky byli v České republice testováni v letech 1995, 1999 a 2007. Přestože se v roce 1995 naši žáci zařadili v přírodních vědách i v matematice mezi nejúspěšnější, v dalších letech testování došlo k prudkému poklesu jejich úspěšnosti (viz obr. 50). V roce 1999 šlo dokonce o největší propad ze všech zúčastněných zemí, v roce 2007 jsme se v porovnání s rokem 1995 zařadili na třetí příčku v poklesu úspěšnosti ze všech evropských zemí a zemí OECD, jež se do výzkumu zapojily.

Neúspěch z roku 1999 lze do jisté míry připsat změnám v systému školství. Ve školním roce 1995/1996 totiž došlo k prodloužení povinné školní docházky z osmi na devět let a s tím souvisejícími přesuny učiva do vyšších ročníků. Žáci tak v době testování TIMSS 1999 neměli zvládnutou stejnou látku jako v roce 1995. Nicméně testování TIMSS 2007 potvrdilo klesající trend úspěšnosti našich žáků v matematice.



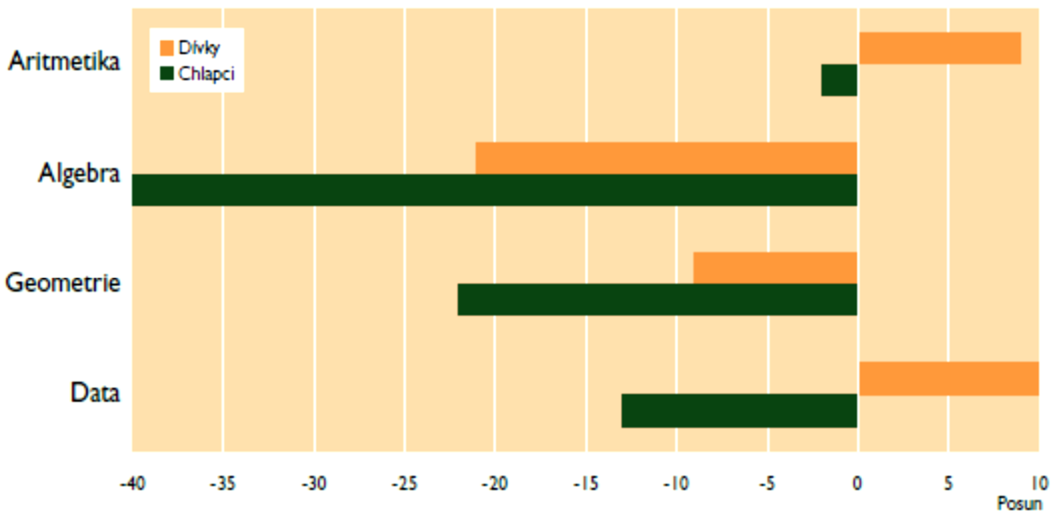
Obrázek 50: Porovnání výsledků 2007, 1999 a 1995 v evropských zemích a v zemíc OECD (TIMSS 2007 – matematika, 8. ročník)

V celkovém hodnocení TIMSS 2007 se čeští žáci 8. ročníků zařadili s 504 body mezi země s průměrným výsledkem. Z Evropských zemí byli úspěšnější pouze Maďaři, srovnatelné výsledky měli například Angličani, Rusové nebo Slovinci. Nejlepších výsledků dosáhli žáci asijských zemí.

Zajímavé také je, že v TIMSS 1999 dopadli výrazně lépe chlapci, zato v TIMSS 2007 se celkové výsledky českých chlapců a dívek téměř nelišily. Úroveň matematických znalostí se tedy u chlapců zhoršila výrazněji. V České republice se také v TIMSS 2007 příliš nelišili výsledky dobrých a slabých žáků (rozdíl mezi 5 % nejlepších a 5 % nejslabších žáků byl 247 bodů; nejmenší bodový rozdíl z evropských zemí zaznamenali Norové s 215 body, kteří ale dosahují podprůměrných výsledků).

Jak již bylo uvedeno výše, celkové výsledky českých žáků osmých ročníků byly v TIMSS 2007 průměrné, přičemž v úlohách z témat aritmetika (čísla), data a pravděpodobnost byli čeští žáci nadprůměrní, v geometrii průměrní a v algebře podprůměrní.

Zhoršení oproti roku 1999 se projevilo hlavně v algebře a geometrii, přičemž čeští chlapci se na rozdíl od dívek zhoršili ve všech čtyřech oblastech učiva (viz obr. 51).



Obrázek 51: Posun ve znalostech českýh chlapců a dívek od roku 1999
(TIMSS 2007 – matematik, 8. ročník)

Rozdělení žáků 8. ročníků podle vědomostních úrovní v evropských zemích a v zemích OECD podle TIMSS 2007 lze najít v (Tomášek, 2008):

Podle tohoto zdroje je v České republice 8 % žáků, kteří nedosáhli ani nejnižší vědomostní úrovně a budou mít tedy pravděpodobně problémy s dalším vzděláváním. S celkovým poklesem výsledků od roku 1995 koresponduje i úbytek výborných žáků (třetí a čtvrtá úroveň), který je po Švédsku druhý nejvyšší z testovaných zemí.

2.2.3 Přehled výsledků úloh z algebry v TIMSS 2007

Jak již bylo uvedeno výše, testování TIMSS 2007 ukázalo podprůměrné výsledky našich žáků 8. ročníků v úlohách z algebry. V této oblasti se žáci oproti minulým ročníkům dokonce zhoršili. Proto bych se nyní chtěla blíže zaměřit na uvolněné úlohy z této oblasti a uvést přehled, jak si v nich čeští žáci vedli. V (Tomášek, 2009, str. 35) se vymezuje obsah oblasti Algebra takto:

> V rámci oblasti učiva algebra je prvořadý důraz kladen na funkční vztahy a jejich využívání k modelování a řešení úloh. Dále do ní patří rozvíjení číselných řad, užívání algebraických symbolů, ale i hodnocení výpočetní zběhlosti žáků. Žáci 8. ročníku by již měli dobře chápat lineární vztahy a pojem proměnné. Očekává se od nich používání a zjednodušování algebraických výrazů, řešení lineárních rovnic, nerovnic, soustav dvou rovnic o dvou neznámých a užívání funkcí. Součástí oblasti učiva algebra jsou tři tematické celky: řady a posloupnosti; algebraické výrazy; rovnice, vzorce a funkce.

Úloha M28

V úloze A (viz obr. 52) měli žáci najít závislost mezi počtem stran mnohoúhelníku a součtem velikostí jeho vnitřních úhlů pro uvedené čtyři obrázky. Za správně vyřešenou se považovalo pouze správné a úplné doplnění tabulky. Dílčí vyplnění tabulky se považovalo za nesprávnou odpověď. Čeští žáci byli v této úloze poměrně úspěšní.

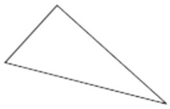
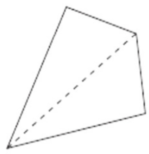
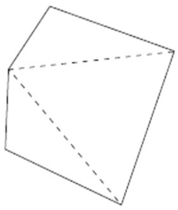
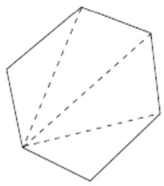
V úloze B měli žáci na základě předchozí úlohy poznat pravidlo, jak závisí počet stran mnohoúhelníku na součtu velikostí jeho vnitřních úhlů, a aplikovat ho na konkrétní případ mnohoúhelníku s 10 stranami. Podle výsledků byla úloha pro většinu českých žáků obtížná.

Úloha C vyžadovala rozpoznané pravidlo z předchozích úloh zobecnit za použití proměnné. Čeští žáci si ve většině případů s touto úlohou neporadili. Výsledky z B a C ukazují na malou zkušenost našich žáků se zobecňováním.

Vnitřní úhly

Jarda zkoumal vlastnosti mnohoúhelníků. Vypracoval tabulku, aby zjistil, zda je možné najít vztah mezi stranami a úhly.

A. Doplň prázdná políčka v tabulce.

Mnohoúhelník	Počet stran	Počet trojúhelníků	Součet velikostí vnitřních úhlů
	3	1	1 · 180°
	___	___	___ · 180°
	___	___	___ · 180°
	___	___	___ · 180°

B. Do čtverečku napiš správné číslo.
Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku s 10 stranami = $\square$ · 180°

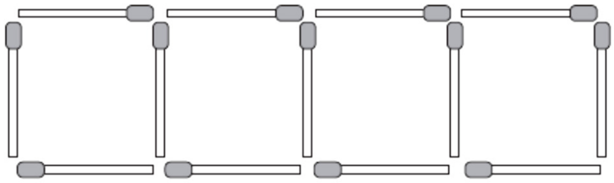
C. Jarda vztah objevil a pomocí *n* dokázal napsat vzorec, který je pravdivý pro jakýkoliv mnohoúhelník. Doplň, co napsal.
Součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku s *n* stranami = ______ · 180°

Obrázek 52

Četnost odpovědí žáků udává tabulka:

<table>
<tr><td>Četnost [%]</td><td>správná odpověď</td><td colspan="2">nesprávná odpověď</td><td>bez odpovědi</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>54,0</td><td colspan="2">40,8</td><td>5,1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>23,4</td><td colspan="2">57,1</td><td>19,5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>6,4</td><td>"n" 20,3</td><td>ostatní: 37,8</td><td>35,5</td></tr>
</table>

Úloha M29



Ze 13 zápalek byly složeny 4 čtverce v řadě, které jsou na obrázku. Kolik čtverců v řadě můžeme složit stejným způsobem ze 73 zápalek? Napiš výpočet, jak jsi dospěl ke své odpovědi.

Obrázek 53

V této úloze (obr. 53) bylo opět klíčové objevit závislost mezi dvěma veličinami – počtem čtverců v řadě a počtem zápalek. Pro vhled do úlohy bylo v tomto případě vhodné sestavit tabulku s hodnotami pro několik prvních případů. Z odvozeného výrazu $4 + 3(n - 1)$ pro počet zápalek nutných k sestavení n čtverců se pak jednoduše pomocí rovnice $4 + 3(n - 1) = 73$ dal vypočítat počet čtverců sestavených ze 73 zápalek. Někteří žáci řešili úlohu graficky (nakreslením konkrétního případu úlohy), nicméně v úloze se požadovalo provést výpočet, a tedy se toto řešení považovalo pouze za částečně správné. Ani v této úloze nedosáhli čeští žáci příliš vysoké úspěšnosti.

	správná odpověď	částečně správná odpověď	nesprávná odpověď	bez odpovědi
Četnost [%]	8,8	11,7	57,9	21,5

Úloha M30

2, 5, 11, 23, ...
Řada začíná číslem 2. Které z následujících pravidel použiješ při výpočtu dalších členů číselné řady nahoře?
A) K předchozímu členu přičti 1 a potom vynásob číslem 2.
B) Předchozí člen vynásob číslem 2 a potom přičti 1.
C) Předchozí člen vynásob číslem 3 a potom odečti 1.
D) Od předchozího členu odečti 1 a potom vynásob číslem 3.

Obrázek 54

Žáci měli v této úloze (obr. 54) vybrat z nabídky pravidlo, podle kterého je tvořena číselná řada. Ačkoliv se jednalo opět o úlohu na zobecnění vztahu mezi prvky posloupnosti, výsledky ukázaly, že tato úloha byla pro české žáky snadná. Oproti předchozím úlohám zde nebylo nutné pracovat s proměnnou, navíc žáci nemuseli pravidlo pro výstavbu číselné řady hledat, stačilo ověřit platnost uvedených čtyř možností.

	odpověď A	odpověď B (správně)	odpověď C	odpověď D
Četnost [%]	4,5	80,5	7,5	2,5

Úloha M31

$a = 3$, $b = -1$.
Kolik je $2a + 3(2 - b)$?
A) 15
B) 14
C) 13
D) 9

Obrázek 55

Tato úloha (obr. 55) prověřovala schopnost dosadit do výrazu konkrétní hodnoty proměnných včetně záporných čísel, ve správném sledu operací výraz upravit a určit jeho hodnotu. Jak ukázala vysoká četnost chybné odpovědi D, úskalím této úlohy se stalo dosazování záporného čísla.

	odpověď A (správně)	odpověď B	odpověď C	odpověď D
Četnost [%]	33,8	5,8	10,4	44,6

Úloha M32

$2a^2 \cdot 3a =$
A) $5a^2$
B) $5a^3$
C) $6a^2$
D) $6a^3$

Obrázek 56

V této úloze (obr. 56) měli žáci využít znalost násobení mocnin se stejným základem. Výsledky ukazují na velkou úspěšnost českých žáků v tomto typu úloh. Při srovnání s mezinárodními výsledky dokonce výrazně překonávají průměr.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C	odpověď D (správně)
Četnost [%]	3,9	9,8	14,9	69,3

Úloha M33

Který výraz se rovná výrazu $4x - x + 7y - 2y$?
A) 9
B) $9xy$
C) $4 + 5y$
D) $3x + 5y$

Obrázek 57

Cílem úlohy (obr. 57) bylo prověřit, zda žáci dokáží zjednodušit algebraický výraz a porovnat s nabízenými řešeními. Čeští žáci byli v této úloze opět velmi úspěšní.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C	odpověď D (správně)
Četnost [%]	1,7	6,8	13,2	75,8

Úloha M34

Který výraz se rovná výrazu $2(x + y) - (2x - y)$?

A) $3y$

B) y

C) $4x + 3y$

D) $4x + 2y$

Obrázek 58

Úloha (obr. 58) opět testovala dovednost práce s algebraickými výrazy. Tentokrát však kromě sčítání a odčítání jednočlenů museli žáci prokázat i znalost násobení dvojčlenu konstantou a odčítání dvojčlenů. Četnost odpovědí ukazuje, že žáci pravděpodobně nejčastěji chybovali v obou operacích současně (odpověď D). Druhou nejčastější odpovědí byla možnost B, kde žáci chybovali v odčítání dvojčlenu. Správně odpověděla jen necelá čtvrtina žáků.

	odpověď A (správně)	odpověď B	odpověď C	odpověď D
Četnost [%]	24,7	26,2	13,2	29,7

Úloha M35

První trubka je dlouhá x metrů. Druhá trubka je y-krát delší než první.
Jak dlouhá je druhá trubka?

A) xy metrů

B) $x + y$ metrů

C) $\frac{x}{y}$ metrů

D) $\frac{y}{x}$ metrů

Obrázek 59

V úloze (obr. 59) měli žáci prokázat schopnost zapsat algebraickým výrazem slovně vyjádřený vztah mezi délkou dvou objektů. Náročnost úlohy spočívala nejenom v práci s proměnnými, ale i v chápání významu spojení „y-krát delší“. Přestože si většina českých žáků s úlohou poradila, z četnosti odpovědí lze usuzovat, že pětina dotazovaných žáků nesprávně chápe vyjádření „y-krát delší“ a plete si jej s vyjádřením „o y delší“.

	odpověď A (správně)	odpověď B	odpověď C	odpověď D
Četnost [%]	57,1	20,7	5,9	11,5

Úloha M36

Halina má o 3 bundy více než Anna. Jestliže počet bund Haliny označíme n, vyjádři pomocí n, kolik bund má Anna.

A) $n - 3$

B) $n + 3$

C) $3 - n$

D) $3n$

Obrázek 60

Tato úloha (obr. 60) testuje schopnost popsat závislost mezi dvěma veličinami pomocí proměnné. Současně s tím byla úloha sestavena tak, aby se dalo zjistit, zda žáci čtou s porozuměním celý text. Úloha totiž obsahuje antisignál „o 3 více“, který žáci musí dát podle kontextu do správných souvislostí. Nerozpoznání antisignálu vedlo řešitele úlohy k odpovědi B. Správně úlohu vyřešila více než polovina dotazovaných českých žáků.

	odpověď A (správně)	odpověď B	odpověď C	odpověď D
Četnost [%]	55,8	28,6	5,9	7,8

Úloha M37

$3(2x - 1) + 2x = 21$

Kolik je hodnota x ?

A) -3

B) $-\frac{11}{4}$

C) $\frac{11}{4}$

D) 3

Obrázek 61

Tato úloha (obr. 61) zkoumá znalosti žáků v oblasti řešení lineárních rovnic. Žáci mohli úlohy řešit buď dosazením nabídnutých možností do rovnice a zjištěním, zda se jedná o kořen rovnice, nebo přímo vyřešením rovnice v zadání. Správně odpověděla většina žáků. Ve srovnání s mezinárodním průměrem byli čeští žáci výrazně úspěšnější.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C	odpověď D (správně)
Četnost [%]	8,3	1,6	13,5	69,1

Úloha M38

Ekvivalentní úpravou nerovnice $\frac{x}{3} > 8$ získáme nerovnici

A) $x < 5$

B) $x < 24$

C) $x > \frac{8}{3}$

D) $x > 5$

E) $x > 24$

Obrázek 62

V úloze (obr. 62) měli žáci vyřešit jednoduchou lineární nerovnici s neznámou v čitateli zlomku. Pro správné vyřešení stačilo vynásobit obě strany nerovnice kladným číslem (třemi). Čeští žáci příliš úspěšní nebyli. Nejvíce žáků uvedlo chybnou odpověď C, což může poukazovat na nesprávné chápání pojmu ekvivalentní úprava. Celkově může být malá úspěšnost způsobena tím, že se žáci 8. ročníků s řešením lineárních nerovnic ve výuce běžně nesetkávají.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C	odpověď D	odpověď E (správně)
Četnost [%]	1,8	22,0	30,3	3,9	29,4

Úloha M39

Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napiš postup výpočtu.

Obrázek 63

V této úloze (obr. 63) mají žáci prokázat schopnost matematizovat reálnou situaci pomocí rovnice s jednou neznámou, nebo pomocí soustavy rovnic se dvěma neznámými. K výsledku žáci dospějí ve dvou krocích. Nejprve musí vypočítat cenu pera a tužky a poté v druhém kroku určit cenu za 1 pero a 2 tužky dohromady. Podle (Tomášek, 2009) se lze domnívat, že malé procento úspěšnosti řešení našich žáků může souviset s tím, že žáci ukončili řešení výpočtem ceny pera, resp. tužky a neprovedli druhý krok výpočtu.

	správná odpověď s uvedením rovnic	správná odpověď s jiným postupem	správná odpověď bez uvedení postupu	nesprávná odpověď	bez odpovědi
Četnost [%]	6,4	18,2	3,6	42,6	29,2

Úloha M40

Celkový poplatek za přepravu zásilky v Zedlandu se vypočítá pomocí rovnice $y = 4x + 30$, kde x je hmotnost zásilky v gramech a y je cena v zedech. Kolik gramů si můžeš nechat přepravit, když máš 150 zedů?

A) 630 g
B) 150 g
C) 120 g
D) 30 g

Obrázek 64

Cílem úlohy (obr. 64) je ověřit, zda žáci umí správně dosadit do vzorce se dvěma proměnnými a následně vyřešit lineární rovnici s jednou neznámou. Žáci, kteří uvedli jako správnou možnost A, chybně dosadili do vzorce. Odpovědi B a C zase ukazují na chybné úpravy rovnice.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C	odpověď D (správně)
Četnost [%]	10,1	13,7	22,8	38,8

Úloha M41

Který bod leží na přímce $y = x + 2$?

A) [0, –2]
B) [2, –4]
C) [4, 6]
D) [6, 4]

Obrázek 65

Zde (obr. 65) byla testována schopnost správně dosadit do vzorce se dvěma neznámými. Odpovědi A a D ukazují na chybné dosazení v podobě záměny hodnot x a y. Zajímavé je také to, že ve srovnání s mezinárodním průměrem třikrát více našich žáků úlohu vůbec neřešilo, což může souviset s tím, že se toto téma u nás zařazuje až do 9. ročníku ZŠ.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C (správně)	odpověď D
Četnost [%]	25,7	19,9	24,5	7,7

Úloha M42

Tabulka zachycuje vztah mezi x a y.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?

A) $y = x + 4$
B) $y = x + 1$
C) $y = 2x - 1$
D) $y = 3x - 2$

Obrázek 66

Žáci mají v této úloze (obr. 66) prokázat schopnost přiřadit předpis k lineární funkci zadané tabulkou. Předpokládá to ověření dosazením všech uspořádaných dvojic z tabulky do předpisu funkce. Vysoká četnost nesprávných odpovědí naznačuje, že se žáci mohli rozhodnout jen na základě ověření jedné uspořádané dvojice, případně při dosazování za proměnné zaměnili hodnoty x a y.

	odpověď A	odpověď B	odpověď C (správně)	odpověď D
Četnost [%]	12,8	24,9	32,4	11,1

2.2.4 Srovnání úspěšnosti úloh

Srovnání úspěšnosti v řešení jednotlivých úloh mezi děvčaty a chlapci a celkovým průměrem jak na národní, tak i na mezinárodní úrovni uvádí tabulka 3. Z tabulky vyplývá, že nejlépe si čeští žáci vedli v části Algebraické výrazy, kde ve třech úlohách (M32, M33, M36) výrazně překonali mezinárodní průměr. Nejhůře dopadli čeští žáci v úloze M28-C, kde byla četnost správných odpovědí o 9,3 % nižší než mezinárodní průměr.

Tabulka 3

Úspěšnost [%]			celkem	dívky	chlapci
Řady a posloupnosti	úloha M28, A	Česká republika	54,0	54,5	53,6
		Mezinárodní průměr	47,4	50,3	44,5
	úloha M28, B	Česká republika	23,4	23,6	23,2
		Mezinárodní průměr	27,6	28,1	26,9
	úloha M28, C	Česká republika	6,4	7,0	5,8
		Mezinárodní průměr	15,7	16,5	14,8
	úloha M29	Česká republika	8,8	8,6	9,1
		Mezinárodní průměr	8,7	8,5	8,9
	úloha M30	Česká republika	80,5	82,4	78,8
		Mezinárodní průměr	63,0	64,4	61,5
Algebraické výrazy	úloha M31	Česká republika	33,8	41,1	26,6
		Mezinárodní průměr	34,2	36,5	31,9
	úloha M32	Česká republika	69,3	72,5	65,9
		Mezinárodní průměr	46,6	49,2	44,0
	úloha M33	Česká republika	75,8	78,7	73,2
		Mezinárodní průměr	60,0	62,4	57,6
	úloha M34	Česká republika	24,7	26,9	22,6
		Mezinárodní průměr	25,8	26,7	24,9
	úloha M35	Česká republika	57,1	62,4	51,9
		Mezinárodní průměr	47,9	50,6	45,3
	úloha M36	Česká republika	55,8	49,8	60,9
		Mezinárodní průměr	40,8	40,7	40,9
Rovnice, vzorce a funkce	úloha M37	Česká republika	69,1	69,4	68,8
		Mezinárodní průměr	57,6	59,5	55,6
	úloha M38	Česká republika 1999	34,4	33,7	35,3
		Česká republika 2007	29,4	29,3	29,5
		Mezinárodní průměr	31,4	32,5	30,4
	úloha M39	Česká republika	24,6	25,6	23,7
		Mezinárodní průměr	17,8	18,3	17,3
	úloha M40	Česká republika	38,8	45,5	32,2
		Mezinárodní průměr	33,9	37,1	30,7
	úloha M41	Česká republika	24,5	26,7	22,3
		Mezinárodní průměr	30,0	28,9	31,3
	úloha M42	Česká republika	32,4	31,5	33,2
		Mezinárodní průměr	38,4	38,1	38,7

2.3 Zahraniční výzkumy

Následující oddíl je věnován třem zahraničním výzkumům, které se zabývaly žákovskými obtížemi při výuce algebry.

2.3.1 A comparison of curricular effects on the integration of arithmetic and algebraic schemata in pre-algebra students

Tento výzkum[201] zkoumal schopnosti žáků integrovat algebraické proměnné s aritmetickými operacemi a symboly v závislosti na výuce.

Výzkum se uskutečnil v Jižní Kalifornii. Vybraný vzorek 27 žáků, kteří ještě neprošli výukou algebry, byl rozdělen na dvě experimentální skupiny. Oběma byl nejprve zadán test zkoumající úroveň jejich znalostí. Poté následovala 20denní výuka úvodu do algebry, pro každou skupinu zvlášť. Výuka zahrnovala řešení rovnic, slovních úloh a práci s výrazy. Avšak každá skupina byla vyučována jiným přístupem (standardizovaně vs. tradičně). Po skončení výukového období byli žáci opět otestováni.

Před začátkem výzkumu byly formulovány tyto hypotézy:

(1) Pouze žáci se standardizovanou výukou výrazně zlepší svoje schopnosti používat proměnné pro reprezentaci obsahu a obvodu geometrických útvarů.
(2) Pouze žáci se standardizovanou výukou výrazně zlepší svoje schopnosti tvorby rovnic ze slovních úloh, ve kterých nejsou použity proměnné, aniž by se uchýlili k aritmetickým konvencím.
(3) Žáci s instruktivistickou výukou se budou více pokoušet dojít ve slovních úlohách k numerickému výsledku, místo aby vytvářeli rovnice.

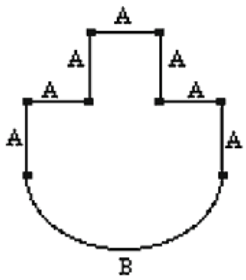
Testy

Obě fáze testování probíhaly v těsné návaznosti na výuku a prováděli je 3 experimentátoři, protože žáci měli být testováni samostatně. Průběh testování byl nahráván. Experimentátoři žákům předkládali postupně čtyři úlohy a nahlas se žáky konzultovali postup řešení. Cílem bylo, aby žáci matematizovali úlohy rovnicí, nikoliv aby řešili samotný problém úlohy, což bylo nutné žákům zdůrazňovat především u slovních úloh. Doba na vypracování jednoho testu činila 35 – 45 min.

Úlohy pre-testu

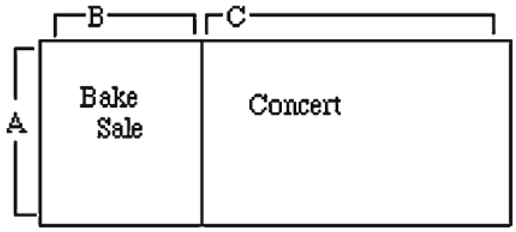
Jaký je obvod tohoto útvaru na obrázku 67?

[201] Moseley, B., & Brenner, M. E. (2009). A comparison of curricular effects on the integration of arithmetic and algebraic schemata in pre-algebra students. *Instructional Science*, *37*(1), 1-20.



Obrázek 67

Arturo plánuje koncert a prodej napečených koláčů na získání peněz pro tým. Potřebuje rozdělit plochu tak, aby vypadala jako na obrázku 68. Pomůžeš mu doplnit tabulku pod obrázkem?



	Délka	Šířka	Obsah
Prodejní sekce (Bake Sale)			
Místo pro koncert			
Celková plocha			

Obrázek 68

Jednokroková slovní úloha: Lauren řeší dlouhý úkol na matematiku. Už má hotovo 21 úloh. Úkol má celkem 30 úloh. Kolik jí zbývá vyřešit?

Dvoukroková slovní úloha: Francisco koupil mamince k Valentýnu přání a zákusky. Utratil celkem 6 dolarů. Přání stojí 2 dolary a koupil celkem 5 stejných zákusků. Kolik stojí jeden zákusek?

Výuka

První experimentální skupina čítající 15 žáků byla vyučována standardizovanou výukou. Tím se v našich podmínkách rozumí výuka konstruktivistická[202]. Žáci po celé výukové období řešili úlohy kolem výběru dodavatele pizzy pro školu. Zadávané úlohy byly reprezentovány různými formami (tabulky, grafy, rovnice) a žáci o nich vzájemně diskutovali. Při řešení problémů potom také sami používali různé postupy a prezentace výsledků. Rovnice a výrazy se pro ně tedy staly jen jednou z možných alternativ vyjádření podstaty úloh.

Druhá skupina 12 žáků byla vyučována tradičně (instruktivisticky), tedy že vždy na začátku vyučující podal výklad nového učiva a poté následovalo procvičování. Více než půlku z celé doby výuky se žáci

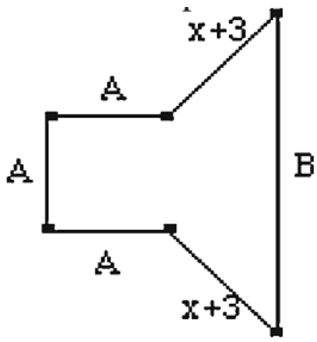
[202] National Council of Teachers of Mathematics. (2000).*Principals and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

zabývali řešením rovnic. Navíc tento vzorek žáků dostával každý týden jeden nestandardní problém na vyřešení za domácí úkol. Během výuky žáci používali učebnici, kde byl kromě jiného uveden tento pětikrokový postup na řešení slovních úloh:

- přečti si zadání;
- zvol proměnné představující neznámé;
- zapiš rovnici;
- vyřeš rovnici;
- zkontroluj výsledky.

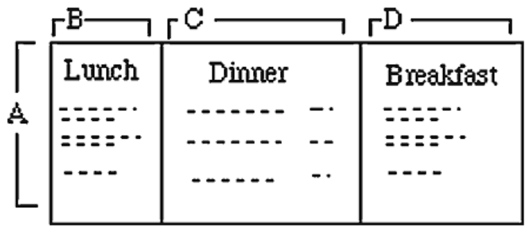
Úlohy post-testu

Jaký je obvod útvaru na obrázku 69?



Obrázek 69

Nina chce vytvořit nové menu pro svou restauraci (viz obrázek 70). Potřebuje rozdělit menu podle diagramu. Můžeš jí pomoci vyplněním tabulky pod obrázkem?



	Délka	Šířka	Obsah
Oběd (Lunch)			
Večeře (Dinner)			
Snídaně (Breakfast)			
Celé menu			

Obrázek 70

Jednokroková slovní úloha: Jana prodala dvakrát tolik bonbonů než Raul. Prodala 42 balení bonbonů. Kolik prodal Raul?

Dvoukroková slovní úloha: Třída prodávala knížky, aby získala peníze na počítačovou učebnu. Každá knížka stála 2 dolary. Před prodejem měla třída ve fondu na počítačovou učebnu 45 dolarů. Po prodeji knížek měla 147 dolarů. Kolik knížek prodala?

Výsledky

Hypotézy uvedené na začátku výzkumu se potvrdily.

Grafické úlohy

Studie ukázala, že u úloh s nákresem se žáci ze skupiny vyučované konstruktivisticky výrazně zlepšili, nejvíc v úloze o obvodu. Naproti tomu žáci, kteří absolvovali instruktivistickou výuku, byli schopní výrazně zlepšit použití proměnných pouze v jednodušší úloze o obvodu, ale už ne v úloze o obsahu, navíc jen polovina z nich dosáhla úrovně 4 nebo 5 (na rozdíl od 87 % žáků z konstruktivistické skupiny).

Slovní úlohy

Žáci ze skupiny vyučované konstruktivisticky se nejvíce zlepšili v použití proměnných v matematickém zápise jednokrokových slovních úloh. Oproti tomu žáci s instruktivistickou výukou se v použití proměnných v matematických zápisech slovních úloh příliš nezlepšili, přestože řešení slovních úloh ve výuce hodně trénovali.

Proměnné při řešení obou slovních úloh použilo 73 % žáků ze skupiny vyučované konstruktivisticky a ve skupině žáků vyučované instruktivisticky použilo 33 % žáků proměnnou v jednokrokové úloze a 25 % v dvoukrokové.

Navíc žáci z konstruktivistické skupiny ukázali přesnější modelování matematických vztahů, 40 % z nich dosáhlo úrovně 6 nebo 7; ve skupině vyučované instruktivisticky to bylo jenom 8,3 %.

Kromě toho se skupina vyučovaná instruktivisticky více snažila slovní úlohy přímo řešit místo matematizovat rovnicí, přestože dostali výslovné zadání, ať neřeší úlohu samotnou, ale pouze zapíší vztahy. Žáci z této skupiny tedy přistupovali k úlohám více aritmeticky než algebraicky.

2.3.2 A Is forApple: Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions

Tato studie zkoumala, jak ovlivňují pochopení algebraických výrazů u žáků znaky (symboly). Hypotézou výzkumu bylo tvrzení, že používání zkratek (např. j jako jablko) žákům interpretaci algebraických výrazů[203] ztěžuje.

[203] McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, *102*(3), 625-634.

Studie byla uskutečněna na etnicky pestrém vzorku 110 žáků z 6. ročníku, 119 žáků ze 7. ročníku a 93 žáků z 8. ročníku jedné státní školy[204] na středozápadě USA. Tato škola se již několikátý rok snaží o přechod ke konstruktivistickému způsobu vyučování, všichni žáci se tedy s prvky tohoto přístupu ve výuce setkali. V rámci kurikula se u žáků v 6. ročníku začíná rozvíjet základní algebraické myšlení, v 7. a 8. ročníku se pozornost přesouvá k samotné algebře, kde jsou do výuky začleněna témata jako řešení lineárních rovnic apod.

Žákům byla během experimentu dána úloha[205]:

> Koláč stojí k dolarů a perník stojí p dolarů. Koupím-li si 4 koláče a 3 perníky, co znamená $4k + 3p$?

Třetina žáků dostala úlohu v originálním znění s proměnnými k a p. Další třetina měla upravenou úlohu, kde písmena k a p byla nahrazena tradičními x a y. Pro poslední třetinu žáků byly použity znaky Φ a Ψ, které pro žáky „druhého stupně" nejsou známé.

Výsledky studie

V 6. ročníku byla úspěšnost výrazně posunuta ve prospěch úloh s označením proměnných písmeny x, y. V 7. a 8. ročníku byl jednoznačně nejlépe interpretován výraz obsahující proměnné označené řeckými písmeny. Ve všech ročnících byla malá úspěšnost u úloh, kde byly proměnné označené počátečními písmeny názvu předmětů, jichž se týkaly.

Tabulka 4: Rozdělení odpovědí

znamená to 4 koláče plus 3 perníky	špatně	pojmenování
čtyři koláče a tři perníky	špatně	pojmenování
může to být cokoliv	špatně	ne-pojmenování
myslím, že to znamená $4x + 3y = ?$	špatně	ne-pojmenování
čtyřikrát cena koláčů plus třikrát cena perníku	správně	operační
(3 perníky krát cena 1 perník) + (4 koláče krát cena 1 koláče)	správně	operační
množství peněz, které by stály 4 koláče a 3 perníky	správně	strukturní
celková útrata	správně	strukturní

Dále autoři rozdělili správné odpovědi žáků (viz tabulka 4) na dva typy – operační, kde žáci interpretují výraz po částech a postupně uvádějí význam jednotlivých symbolů (např. čtyřikrát cena koláčů plus třikrát cena perníku), a strukturní, kde žáci pojímají výraz jako celek (např. celková útrata za 4 koláče a 3 perníky). Nejméně strukturních odpovědí uvedli žáci, kteří měli k dispozici výraz se zkratkami názvů předmětů ze zadání úlohy.

[204] Jedná se o ročníky ve vzdělávacím systému USA.
[205] V originále proměnné c, b jako cookie a brownie.

Tendence považovat proměnné za zkratku pojmenování předmětů (a tedy problém vidět v písmenech proměnné) měli především žáci, kteří řešili úlohu s výrazem obsahujícím písmena k a p. Naproti tomu žáci, jejichž zadání obsahovalo řecká písmena, měli v interpretaci výrazu nejvyšší procento úspěšnosti. Za zajímavý lze označit i fakt, že v 6. ročníku žádný z dotazovaných žáků, který řešil variantu s řeckými písmeny, nepovažoval písmena za symboly označující dané předměty.

Analýza učebnic

V rámci výzkumu se autoři zaměřili i na učebnice, které používá testovaná škola při výuce svých žáků. Náhodně vybrali 50 % stran z každé učebnice pro 6. až 8. ročník a každý výskyt proměnné zapsané symbolem zařadili do jedné z těchto skupin:

- otazník;
- znak anglické abecedy:
  - zkratka začínající prvním písmenem toho slova (např. k jako kočka, m jako metr…);
  - ne-zkratka, např. x;
- znak řecké abecedy.

Četnost zastoupení těchto symbolů v učebnicích uvádí tabulka 5. Je důležité podotknout, že ačkoliv byly zkratky v učenicích použity různými způsoby, neobjevili experimentátoři během analýzy (konstruktivistické učebnice) jediný případ, kde by byla zkratka použita ve špatné souvislosti (např. k zastupuje kočku, pak $5k$ představuje 5 koček).

Tabulka 5: Procentuální zastoupení symbolů

	6. ročník	7. ročník	8. ročník
Otazníky	44 %	4 %	< 1 %
Latinka celkem	53 %	95 %	99 %
z toho zkratky	15 %	32 %	27 %
Řecké symboly	3 %	1 %	1 %

Závěry studie

Výzkum podpořil počáteční hypotézu, že používání zkratek žákům ztěžuje chápání významu algebraických proměnných. Současně z něj vyplynulo, že pro označování proměnných je vhodnější používat písmena x, y a řecké symboly. Ze studie však nelze zjistit důvody, proč tomu tak je. Přesto autoři uvedli alespoň tři možné příčiny:

1. Od předškolního věku se žáci učí písmenům ve spojitosti s předměty (např. A – ananas, B – bonbon, C – citron), později se to učí i v matematice (např. m – metr, g – gram). Žáci tedy od prvopočátku vnímají písmeno jako označení předmětu (letters as labels). Protože se dlouhou dobu s jinými významy nesetkávají, není pro ně přirozené vnímat, že písmena mohou označovat proměnné.

2. Použití symbolu spíše vede ke konkrétním věcem než k obecným konceptům (např. $\boldsymbol{b}$ jako bonbon vs. $\boldsymbol{b}$ jako počet bonbonů).
3. Učitelé při výuce tuto problematiku podceňují a v rámci zjednodušování si pomáhají různými tvrzeními, které podporují chápání písmen jako zkratek (např. při zavádění sčítání jednočlenů „jablka a hrušky nemůžeš sčítat").

Autoři upozorňují, že výsledky studie ukazují pouze na (ne)vhodnost užití písmen jako zkratek pro označení předmětů (typu $\boldsymbol{k}$ jako koláč a $\boldsymbol{p}$ jako perník). Pro zkratky označující vlastnosti (např. $\boldsymbol{c_k}$ jako cena koláče) z této studie nic jednoznačně nevyplývá. V krátkodobém měřítku by tento druhý typ zkratek dokonce mohl být pro žáky přínosný, nicméně v dlouhodobém pohledu autoři studie od používání zkratek během výuky (bez ohledu na to, jak jsou odvozeny) odrazují, protože to žáky utvrzuje v naivní představě, že písmenka označují přímo dané předměty místo proměnných.

V závěru je ještě uvedena poznámka, že se tento výzkum zaměřil na interpretaci algebraických výrazů, které byly napsány odborníky (např. učitelem, výzkumníkem, autorem učebnic apod.) Výsledky výzkumu by se proto neměly zobecňovat na situace, ve kterých žáci sami vytvářejí vlastní symboly při psaní svých vlastních algebraických výrazů.

2.3.3 Students' understanding of algebraic notation

Tento výzkum se zabýval porozuměním algebraickému zápisu žáků ve věku od 11 do 15 let[206]. Testování probíhalo ve třech fázích a dohromady se do něj zapojilo kolem 2 tisíc žáků z 24 australských škol různého typu. Autoři si na začátku položili tyto výzkumné otázky:

- Jak žáci, kteří se ještě neučili algebru, interpretují písmena, a jak se snaží zapsat algebraické výrazy? Přistupují k algebře a k použití písmen s nějakými prekoncepty?
- Jak žáci interpretují písmena a jednoduché algebraické výrazy během tří let výuky algebry?
- Co je příčinou konkrétních chyb a nepochopení?

První fáze výzkumu

První části výzkumu se zúčastnila skupina žáků ve věku 11–12 let, která se ještě nesetkala s algebrou. Žákům byly předloženy dva podobné testy. První testování proběhlo na začátku experimentu, poté žáci absolvovali 8týdenní výuku základů algebry a v závěru byli opět otestováni. Zde jsou uvedeny úlohy, které byly žákům zadány před výukou algebry:

1) David je o 10 cm vyšší než Con. Con je vysoký $\boldsymbol{v}$ cm. [207] Co můžeš napsat o Davidově výšce?
2) Sue váží o 1 kg méně než Cris. Cris váží $\boldsymbol{y}$ kg. Co můžeš napsat o váze Sue?

[206] MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.
[207] V originále $\boldsymbol{h}$ (*height* – výška).

Po 8týdenní výuce základů algebry měl test tuto podobu:

1) Con je o 8 cm vyšší než Kim. Kim je vysoký y cm. Co můžeš napsat o Conově výšce?
2) Sam je o x cm menší než Eva. Eva je vysoká 95 cm. Co můžeš napsat o výšce Sama?

Z výsledků testování před výukou algebry vybrali autoři těchto 14 žákovských odpovědí na první úlohu a pokusili se identifikovat úvahu, která žáky pravděpodobně k dané odpovědi vedla:

Žáků	Odpověď	Předpokládaná úvaha
1	$10 + v$ (správně)	přičti 10 k číslu nebo velikosti označené v
1	$v10$	přičti/přidej 10 k v
1	Nv[208]	zkratka „Neznámá výška“
2	32[209]	v je 22. v abecedě a tedy o 10 více je 32
2	110	urči rozumnou velikost pro Cona a přičti 10
2	t, u	zvol jiné nebo sousední písmeno pro Davidovu výšku
5	10, 20, „polovina“	neporozumění otázce; použij zadanou hodnotu 10 a operace „dvojnásobek“ nebo „polovina“

Podobně byly zpracovány výsledky obou testových úloh od vybraných 14 žáků, kde autoři opět uvedli pravděpodobné úvahy, které k daným řešením vedly. Přehled udává tato tabulka:

Žáků	David	Sue	Předpokládaná úvaha k Sue
1	$10 + v$	$y - 1$	odečti 1 od čísla nebo velikosti označené y
1	$v10$	x	ačkoliv 10 může být přičteno/přidáno k v, jako $v10$, 1 nemůže být „odečtena/odebrána“ od y; pro označení o 1 méně než y, zapiš x
1	Nv[210]	Nv[211]	zkratka „Neznámá výška“
2	32[212]	24	y je 25. v abecedě a tedy o 1 méně je 24
2	110	*žádná odpověď*	
2	t, u	o, x	zvol jiné nebo sousední písmeno
4	10, 20	1	neporozumění otázce; použij zadanou hodnotu 1
1	„polovina“	*žádná odpověď*	

Po výuce algebry byl žákům zadán druhý z výše uvedených testů. Procentuální zastoupení odpovědí v obou testech je pro srovnání shrnuto v tabulce:

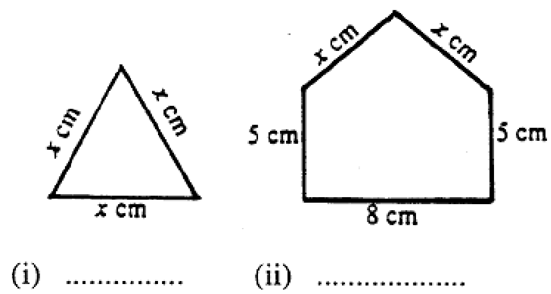
[208] V originále Uh (*unknown* – neznámá).
[209] V originále 18.
[210] V originále Uh (*unknown* – neznámá).
[211] V originále Uw (*unknown weight*– neznámá váha).
[212] V originále 18.

Kategorie	Před výukou ($n = 42$)	Po výuce ($n = 38$)
Neznámá velikost – správně	2 %	37 %
Neznámá velikost – špatně	2 %	26 %
Zkratka	2 %	0
Abecední hodnota	5 %	0
Číselná hodnota	5 %	8 %
Použití jiného písmene	5 %	8 %
Písmeno ignorováno	12 %	10 %
Bez odpovědi	67 %	11 %

Druhá fáze výzkumu

Této části výzkumu se zúčastnil největší vzorek žáků. Jednalo se o žáky ve věku 11 – 15 let z 22 škol. Žáci byly testováni pouze jednou pomocí 4 úloh. První dvě úlohy byly stejné jako v předchozí výzkumné části. Zadání tedy vypadalo takto:

1) David je o 10 cm vyšší než Con. Con je vysoký v cm. [213] Co můžeš napsat o Davidově výšce?
2) Sue váží o 1 kg méně než Cris. Cris váží y kg. Co můžeš napsat o váze Sue?
3) Jaký je obvod útvarů na obrázku 71?
4) n označuje neznámé číslo. Napiš následující pomocí matematických symbolů: Přičti 5 k n a pak vynásob 3.



Obrázek 71

Procentuální zastoupení správných odpovědí u žáků 6. - 9. ročníků[214]

Úloha s odpovědí	6. ročník (307)	7. ročník (511)	8. ročník (338)	9. ročník (307)
1) $v + 10$	39 %	52 %	63 %	73 %
2) $y - 1$	36 %	46 %	60 %	64 %
3.i) $3x$	42 %	44 %	65 %	61 %
3.ii) $2x + 18$	27 %	35 %	55 %	53 %
4) $3(n + 5)$	14 %	17 %	25 %	47 %

[213] V originále h (*height* – výška).
[214] V originále 7. - 10. ročník.

Zajímavý je fakt, že v 6. ročníku byla pro velký počet žáků úspěšnost v úloze 1 a 2 přibližně stejná jako v předchozí výzkumné části u malého vzorku žáků po absolvování výuky algebry. Relativní četnost odpovědí na úlohu 4 (pro zajímavost) udává tabulka:

Ročník	Žáků	Správně	Bez závorek	S exponentem	$15n$	$5n \times 3$	Jinak	Nic
6.	368	14 %	14 %	2 %	8 %	6 %	20 %	36 %
7.	594	19 %	22 %	1 %	6 %	2 %	26 %	24 %
8.	386	26 %	21 %	2 %	10 %	4 %	22 %	15 %
9.	458	47 %	11 %	1 %	8 %	4 %	9 %	20 %

Třetí fáze výzkumu

Poslední fáze výzkumu se zabývala vývojem úspěšnosti v řešení stejného typu úloh. Učitelé ze třech škol testovali žáky třikrát během 13 měsíců, aby zjistili jejich vývoj a odhalili přetrvávající chyby. Dvě z těchto škol byly testovány dvakrát v 7. ročníku a jednou v 8. ročníku. Zbývající škola byla testována dvakrát v 8. ročníku a jednou v 9. ročníku[215]. Testy obsahovaly kosmetické změny, aby nevypadaly stejně, ale jednalo se stále o ty samé testy. Procentuální úspěšnost žáků v jednotlivých fázích testování je uvedena v tabulce:

	Škola A 7. - 8. ročník (70 žáků)			Škola B, 7. - 8. ročník (60 žáků)			Škola C 8. - 9. ročník (26 žáků)		
Úloha	1. test	2. test	3. test	1. test	2. test	3. test	1. test	2. test	3. test
1	70	86	96	70	90	90	50	69	65
2	57	90	93	75	95	90	38	65	46
4	20	41	74	35	35	55	31	81	62

Z tabulky vyplývá, že žáci školy A a B se v průběhu doby v řešení úloh zlepšovali. Důvody, proč se škola C nezlepšila, naopak při posledním testování značně propadla, odhalila diskuse s učiteli. Ukázalo se, že učitelé ve výuce pracují s materiály, v nichž jsou běžně používána písmena jako zkratky ($\boldsymbol{k}$ kočky apod.), na rozdíl od škol A, B, kde používají písmena jako neznámé. Přestože učitelé ze školy C upravili způsob výuky, žákům již zůstala představa písmene jako zkratky zafixovaná a na vyšší úspěšnost to nemělo vliv.

Zajímavý vliv na úspěšnost v třetí úloze u školy C mělo cvičení na správné závorkování, které žáci absolvovali ve výuce před zadáním druhého testu. To zvýšilo jejich úspěšnost. Při třetím testování se ale projevil trend nacvičené dovednosti zapomínat, proto opět došlo k poklesu počtu správných odpovědí.

Závěry výzkumu

Výzkum zjistil, že většina žáků do 15 let není schopná interpretovat algebraická písmena (*algebraic letters*) jako zobecněná čísla (*generalised numbers*) nebo jako konkrétní neznámé (*specific unknowns*).

[215] V originále uvedeny o stupeň vyšší ročníky, „přeloženo" dle věku žáků do kontextu naší povinné školní docházky.

Místo toho nahrazují písmena číselnými hodnotami, nebo je považují za zkratky. Za možné příčiny nesprávné interpretace autoři studie uvádí intuitivní předpoklady žáků a jejich pragmatické uvažování o novém zápise; podobnost se zažitými systémy znaků (*symbol systems*); ovlivnění z nových poznatků v matematice; účinky nesprávných učebních materiálů.

3 Experimentální část

Cílem mé práce bylo získat vhled do problémů, které mají žáci při přechodu mezi slovním a algebraickým vyjádřením. Na základě teoretické kapitoly jsem mohla předpokládat, že žáci budou mít potíže s interpretací významu písmen a s algebraizací textu. Tomu odpovídaly i vybrané úlohy, které jsem získala od vedoucí diplomové práce. Testové úlohy byly seřazeny do tří částí. První úloha byla komplexního typu, tj. k delšímu textu se vázalo několik otázek, které se týkaly sestavení vzorce a práce se vzorcem na základě reálného kontextu. Druhá část se týkala algebraizace výrazů z běžného jazyka do algebraického (s otevřenou odpovědí) a třetí byla opět na algebraizaci výrazů, tentokrát s výběrem odpovědi. Některé úlohy byly převzaté z již uskutečněných výzkumů. Konkrétní podoba testu je uvedena v přílohách 1 a 2.

3.1 Popis pilotní studie

Pilotní studii jsem uskutečnila na ZŠ Kladská v Praze. Na doporučení třídní učitelky, která v dané třídě učí matematiku, jsem vybrala tři žákyně devátého ročníku. Základním požadavkem při výběru byla jejich průměrnost v matematice, tedy aby se při řešení úloh dalo předpokládat, že budou mít nějaké potíže. Mým cílem bylo odhalit v úlohách místa, kde se v procesu řešení může vyskytovat problém, a rozhovorem nad řešením zjistit, proč k němu došlo. Druhým požadavkem tedy byla dobrá komunikativnost žáků, aby dokázali své postupy vysvětlit. Dvě z vybraných žákyň patřily mezi „dvojkaře“, jedna mezi „trojkaře“ (těch je prý ve třídě málo).

Díky vstřícnosti třídní učitelky se rozhovory uskutečnily ve volné místnosti, kde některé dny v týdnu probíhají konzultace školního psychologa, nebyly jsme tedy rušeny. Dívky jedna po druhé vstupovaly do místnosti a vždy dostaly zadání úloh vytištěné na papíře a slovně jim byl vysvětlen smysl testování. Také jim bylo sděleno, že nejsou omezeny časem a že se od nich očekává, že budou v průběhu řešení o svých myšlenkových procesech hovořit a že budou odpovídat na mé otázky týkající se řešení úloh. K dispozici měly volné papíry na poznámky a kalkulačku. Znovu jsem je upozornila, že náš rozhovor bude nahráván na videokameru (tuto informaci měly dopředu od třídní učitelky), a ujistila jsem se, že s tím nemají problém.

Žákyně řešily úlohy postupně, nejvíce času jim zabrala úvodní komplexní úloha, o které se dokonce poslední žákyně v řadě vyjádřila, že je „podezřelá“. Soudím z toho, že nejsou zvyklé úlohy tohoto typu řešit. Vypracování jednoho celého testu i s rozhovorem nad řešením trvalo přibližně hodinu. Žákyně budu označovat Ž1, Ž2, Ž3 podle pořadí, v němž se rozhovory uskutečnily. Ž1 a Ž3 patří mezi „dvojkařky“, Ž2 je „trojkařka“. Rozhovory budu vyhodnocovat podle řešených úloh. Dále následuje popis jednotlivých úloh.

Úloha 1a

V prvním rozhovoru jsem byla velmi nejistá, a zaskočila mě tedy hned úloha 1a, kdy Ž1 nevěděla, jak se do ní pustit. Místo použití otázek k analyzování příčiny nepochopení jsem rovnou začala vysvětlovat způsob řešení. Při zhlédnutí nahraných rozhovorů mě napadlo, že žákyně zřejmě nepochopila otázku, co má vzorec počítat. Navrhuji tedy upravit otázku, aby byla více zřejmá. Dalším problematickým místem byla tabulka – žákyně si ji nečetly, a tedy nechápaly, proč mají ve vzorci doplňovat + a −. Pomohlo, když jsem Ž1 požádala, aby mi tabulku a údaje v ní popsala. Hodnocení Energetické náročnosti ale napoprvé interpretovala špatně, zřejmě si nepřečetla pořádně zadání.

Ž2 také nevěděla, jak se do úlohy pustit. Zeptala jsem se, jak by určila nejlepší kuchyň na základě dat v tabulce ona. Poté jsme začaly diskutovat nad tabulkou a Ž2 uváděla, které kuchyně jsou v rámci jednotlivých kritérií nejlepší. Po nějaké době Ž2 do úlohy pronikla a pochopila, co se po ní v úloze 1a chce, doplnění znamének do vzorce již provedla bez váhání. (V průběhu přemýšlení padl také návrh udělat aritmetický průměr uvedených hodnot pro každou kuchyň, který jsme posléze zavrhly.)

Ž3 po přečtení úlohy 1a ihned začala počítat. Dosadila do vzorce znaménka plus, hodnoty pro kuchyň K1 a hodnotu výrazu vyčíslila. Potom vzorec obměnila a dosadila znaménko mínus před Energetickou náročnost, ale dosazování nedokončila a celý výraz přeškrtla. Poté opět dosadila všude znaménka plus, hodnoty pro K2 a vyčíslila. Po těchto výpočtech se vrátila do zadání a doplnila do vzorce všude znaménka plus jako výsledek. Potom přešla k další úloze. Když jsem se zeptala, jakým způsobem postupovala, zadívala se na vzorec a znaménko před Energetickou náročností změnila na mínus. Potom začala vysvětlovat hodnoty v tabulce, přičemž najednou přeškrtla řešení v úloze 1b a zase se vrátila k tabulce. Není mi jasné, jestli to opravdu tak rychle prohlédla, nebo jestli tuto úlohu pár minut před tím nekonzultovala s Ž1 a Ž2, se kterými se jistě střetla na chodbě, protože v době výměny byla zrovna přestávka.

Úloha 1b

S úlohou 1b žádný problém nebyl, dosazení do vzorce je pro žáky zřejmě rutinní záležitost.

Úloha 1c

Ž1 chvíli přemýšlela a potom bez jakýchkoliv výpočtů určila maximální hodnotu. Na můj dotaz, jak na to přišla, se ukázalo, že to byl nepodložený odhad (uvažovala pouze v rámci kategorie Vzhled, kde porovnávala hodnoty). Navrhla jsem jí, aby si to ověřila, což udělala, a vyšlo to. Nad otázkou, jestli je to jediné řešení, váhala, načež odpověděla, že je. (Její pravděpodobná úvaha: Vzhled může být ohodnocen body 1, 2, 3. Kuchyň K1 získala 2 body, tedy kuchyň K5 musí získat 3 body, aby byla lepší.) Neuvědomila si dvě věci – že v tabulce jsou uvedeny průměrné hodnoty, tedy nejsme v oboru přirozených čísel, a pak význam ostatních proměnných ve vzorci. Na obor, v kterém se pohybujeme, jsem ji upozornila, načež změnila svou odpověď, že řešení je v intervalu od 2 do 3 (stále porovnávala pouze hodnoty v rámci kategorie Vzhled). Zkusila si ověřit, že to platí pro hodnotu 2,1, ale samozřejmě jí to nevyšlo. Evidentně ji to překvapilo, ale nevěděla, co s tím, a mě v tu chvíli nenapadlo, jak ji správně navést, proto jsme úlohu opustily. Když nad tím nyní přemýšlím, možná nepochopila otázku, že vlastně má porovnávat celkové hodnocení, nikoliv jen kategorii Vzhled.

Ž2 si nejprve vyjádřila celkové hodnocení kuchyně K5, přičemž body za Vzhled označila písmenem x. Potom vypočítala rozdíl mezi celkovým hodnocením K1 a dílčím hodnocením K5 (celkové hodnocení K5 kromě bodů získaných za Vzhled x). Vyšla jí hodnota 2,66. Jako odpověď nejprve uvedla, že by kuchyň K5 musela získat nejméně 2,7 bodů za Vzhled. Na mé otázky, zda by nemohla dostat třeba 2,69 nebo 2,6600001 bodů, se opravila na 2,67 a potom uvedla, že nejméně 2,66, přičemž pro tuto hodnotu by měly obě kuchyně celkové hodnocení stejné.

Ž3 nejdříve vypočítala, kolik bodů by získala K5, kdyby se nehodnotil Vzhled, a potom určila rozdíl mezi tímto číslem a celkovým hodnocením K1. Vyšla jí hodnota 2,66, kterou musí získat K5 v kategorii Vzhled, aby v celkovém hodnocení dopadly K1 i K5 stejně. Z toho vyvodila závěr, že K5 musí dostat za Vzhled alespoň 2,67 bodů, aby byla lepší. Následovala diskuze, jestli to je nejmenší hodnota (a jestli je jediným řešením). Zaujalo mě, jak byla Ž3 svázaná představou, že výsledná hodnota musí být v řádu setin (nebo nějakém předem jasně řečeném řádu). Myslím, že to souvisí s diskrétním/spojitým chápáním reálných čísel (patrné i u Ž2). Ž3 si neuměla představit, že by výsledek mohla vyjádřit otevřeným intervalem nebo ostrou nerovností (větší než 2,66), měla potřebu vyjádřit výsledek jednou konkrétní (minimální) hodnotou, pro kterou to platí, tedy si vlastně díky omezení na setiny vytvořila diskrétní model.

Úloha 1d

Ž1 napadlo spočítat aritmetický průměr bodů pro každou kuchyň, aniž by si uvědomila, že to je zbytečná práce (výsledky jsou ve stejném poměru, jako když by pro každou kuchyň body jednoduše sečetla). Zajímavé také bylo, že tuto úlohu chápala úplně mimo realitu – nezabývala se koeficienty ve vzorci, ale zkoušela vymyslet vzorec nový, který sice splňuje zadání úlohy, ale nevypovídá o kvalitě kuchyně (body za Energetickou náročnost se přičítají). V tomto smyslu by se mělo zadání nějak upravit, jinak stačí všechny body sečíst a vyjde to, žáci nemusí význam koeficientů a hodnot proměnných vůbec uvažovat, úloha pak neplní svůj smysl. (Stejný „nereálný“ vzorec, kde se body prostě sečtou, uvedly později i další žáci.) Pokusila jsem se Ž1 nasměrovat k vytvoření analogického vzorce, jako byl v úloze 1a, ale zamotaly jsme se v chápání „pozitivního“ a „negativního“ hodnocení. Nakonec jsme se ale od tohoto vzorce odrazily a Ž1 zkoušela, jak by dopadlo celkové hodnocení pro jednotlivé kuchyně, pokud by nahradila všechny koeficienty jedničkou. Potom jsem se ji pokusila nasměrovat k tomu, aby zkusila nějaký koeficient změnit. Chvíli přemýšlela, pak ji ale správně napadlo, že bude výhodné zvýšit koeficient před tou proměnnou, která se přičítá a zároveň má nejvyšší hodnotu právě pro kuchyň K4; umístila tedy koeficient šest před proměnnou V. Za zajímavý považuji závěr, kdy při zápisu řešení chtěla Ž1 před proměnnou V napsat místo konkrétního koeficientu písmeno x, tedy $F + B - U + x \cdot V$. Odůvodnila tento zápis tím, že tam přece musí být „x krát nějakej koeficient". Vůbec se nezabývala otázkou, jakých hodnot x může nabývat.

Ž2 nevěděla, jak se do úlohy pustit, ale správně tušila, že nějaký význam budou hrát koeficienty ve vzorci, neuměla tu myšlenku ale uchopit. Proto jsem se jí začala ptát, kolik bodů by dostaly jednotlivé kuchyně za Funkčnost, kdyby koeficient byl 1, 2, 5, 10… Ž2 si některé hodnoty vpisovala do tabulky a přemýšlela, jaký to má na celkové hodnocení vliv. Udělala jsem s ní vlastně malý rozbor toho, jak zvyšující se koeficient před F ovlivňuje celkové hodnocení kuchyní. Překvapilo mě, jak rychle si to Ž2 srovnala v hlavě a že dokonce při sestavování vzorce použila desetinná čísla menší než jedna (ukázala tím, že dokázala rozvinout myšlenku i druhým směrem, tedy že koeficient menší než 1 výrazně zmenší rozdíly v bodovém hodnocení jednotlivých kuchyní). Trochu se zarazila u Energetické náročnosti, kde se body odečítají, ale když jsem jí poradila, aby si zkusila sepsat hodnoty pro nějaký zvolený koeficient, rychle se zase zorientovala. Sestavila vzorec $1 \cdot F + 0{,}1 \cdot B - 0{,}1 \cdot U + 10 \cdot V$, načež jsem ji požádala, aby ověřila, jestli platí, což provedla bez problému.

Ž3 nejprve všechny body sečetla ($F + B + U + V$). Na dotaz, jestli by to takto šlo i v realitě, se cítila dotčeně, že tam není napsané, že to má být „v realitě". Nakonec se zamyslela a zkusila všechny hodnoty sečíst, jen hodnoty Energetické náročnosti odečíst ($F + B - U + V$). Viděla, že to pro K4 výhodné není. Napadlo ji tedy, že by mohla výsledek ovlivnit vhodnými koeficienty. Náhodně si nějaké vybrala ($F \cdot 2 + B \cdot 3 + V - U \cdot 2$) a spočítala, jak by dopadlo celkové hodnocení pro kuchyň K1 a K4. Viděla, že koeficienty nezvolila správně. Při druhém pokusu už použila úvahu, že bude výhodné, když před proměnnou, u které má K4 nejlepší hodnocení, umístí nějaký velký koeficient, a před proměnnou, u které má K4 špatné hodnocení, umístí malý koeficient, například jedničku (čísla menší než jedna neuvažovala). Pokusně vytvořila vzorec $V \cdot 10 + B \cdot 3 + F \cdot 4 - U$ a vypočítala celkové hodnocení pro K1 a K4, pro které to vyšlo. Pak ji napadlo, že by bylo přehlednější, kdyby se Energetická náročnost ve vzorci neodečítala, ale vytvořily se jakési inverzní hodnoty $(3 - U)$, které by se ve vzorci přičítaly, čímž by se lépe odhadovaly vhodné koeficienty. Ž3 pak již úlohu nedopočítala, pouze slovně vysvětlila.

Úloha 2

Ž1 měla tendenci považovat písmeno j za bedýnku jahod (tedy chápání písmene jako konkrétní objekt, například v jejím příkladu j = tříkilová bedýnka), přitom j označovalo počet kilogramů v bedýnce jahod. Byla jsem tak zaujatá tím, co chci slyšet, že jsem si odpověděla sama.

Ž2 chápala 5j jako pětinásobek počtu kilogramů v bedýnce, což je v zásadě správně.

Ž3 pojala písmeno j jako proměnnou, za kterou je potřeba dosadit, aby dokázala určit, kolik je $5j$. Dělalo jí problém interpretovat její význam (že vyjadřuje počet). Snažila jsem se jí napovědět ne příliš vhodnou otázkou, jak by chápala nápis $5j$ na vývěsce u obchodu, když by j označovalo počet kilogramů jahod v jedné bedýnce. Ž3 na to reagovala tak, že $5j$ by byla hmotnost těch jahod nebo kolik toho (myšleno jahod) v obchodě mají. Na otázku, co přesně vyjadřuje písmeno j, řekla, že hmotnost. Zkusila jsem se zeptat, co znamená trojka v zápise 3 kg, na což Ž3 uvedla, že vyjadřuje množství, kolik toho je. Reagovala jsem na to tvrzením, že j tedy vyjadřuje počet kilogramů. Ž3 pak uvedla, že $5j$ znamená buď 5 bedýnek po jednom j nebo jednu bedýnku, ve které je $5j$ kilogramů jahod. Vysvětlila to tím, že kdyby j byl 1 kg, tak $5j$ by bylo 5 kg. Chtěla jsem ještě vědět, jak by to bylo v případě, když by j byl počet kilogramů v jedné bedýnce, na což uvedla, že $5j$ by vyjadřovalo 5 bedýnek.

Žáci nechápali, co se po nich v úloze chce, protože nedokázali dobře rozlišit různé významy svých tvrzení. Navíc je mé nápovědy a otázky akorát mátly. Nenapadlo mě, jak úlohu lépe formulovat, proto jsem si pro hlavní studii připravila nápovědu v podobě výběru ze čtyř možností, kde byla pouze jedna odpověď správná. Slibovala jsem si od toho, že když žáci jednotlivé možnosti uvidí před sebou napsané, snadněji rozliší význam jednotlivých tvrzení.

Úloha 3

Tato úloha nedělala žákyním žádný problém, nemusela jsem použít ani nápovědu, zřejmě mají s tímto typem úloh dost zkušeností.

Úloha 4

Ž1 vyřešila úlohu bez potíží.

Ž2 si udělala stručný zápis – Zuzana váží z, Tomáš $z + 1$. Výsledek okomentovala slovně, nenapsala to jako rovnost, což jsem si v danou chvíli neuvědomila a neupozornila ji na to.

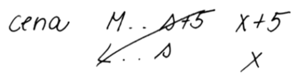
Ž3 si nejprve vyjádřila váhu Tomáše a Zuzany pomocí proměnné x (správně, v jejím podání je váha T rovna x, váha Z rovna $x - 1$), zřejmě rutina při řešení slovních úloh. Potom si uvědomila, že jsou v úloze jednotlivé hmotnosti vyjádřeny pomocí proměnných t, z, proto zápis pomocí x opustila (a o chvíli později i škrtla) a vyjádřila váhu Tomáše rovností $t = z - 1$ a váhu Zuzany $z = t + 1$. Na mou prosbu, aby mi ten zápis vysvětlila a zkusila, jestli platí pro konkrétní případ „Tomáš váží 50 kg“, chybu odhalila.

Úloha 5

Úloha 5 je podle mého názoru velmi vhodná – žáci si při ní mohou uvědomit důležitost zápisu, protože je na první pohled nepřehledná a špatně se v ní orientuje. Ž1 si zápis udělala, ale už asi byla unavená a neustále si pletla významy písmen, tak jsem jí musela opakovat a připomínat, co vlastně dělá. Nicméně samotná práce s proměnnými jí potíže nedělala.

Ž2 si přečetla zadání a napsala $5x$ (zřejmě četla nepozorně). Potom se znovu zadívala do zadání a asi jí přišla úloha nepřehledná, protože si vzala čistý papír a zapsala si na něj pod sebe „čokoláda Margot“, „lentilky“. Nic víc. Potom si ještě přečetla zadání a chvíli přemýšlela, zřejmě si tím v hlavě všechno uspořádávala, protože následně přeškrtla výraz $5x$ a zapsala $x \cdot m + p$ (nedokončila jej, opět začala přemýšlet, do toho jsem se jí zeptala, co zatím napsala, začala mi to tedy vysvětlovat). Následně výraz správně doplnila. Největším problémem tedy byla pro Ž2 orientace v zadání úlohy, s čímž si nakonec velmi dobře poradila.

Ž3 se rovnou pustila do výpočtu. Nejdříve správně vyjádřila, kolik by utratila celkově za čokolády Margot, výrazem $\boldsymbol{x \cdot m}$. Potom chvíli přemýšlela a začala si pod to vyjadřovat cenu jedné krabičky lentilek, kterou označila písmenem *s*, a doplnila i cenu jedné čokolády Margot výrazem $\boldsymbol{s + 5}$, což bylo ještě v pořádku. Potom si znovu přečetla zadání a zřejmě ji něco zmátlo, protože přeškrtla výraz $\boldsymbol{x \cdot m}$. Abych se v jejím myšlenkovém postupu zorientovala, zeptala jsem se, co počítá, ale moc mi toho neřekla a ještě přeškrtla zápis pomocí písmene $\boldsymbol{s}$ a začala cenu lentilek a čokolád vyjadřovat pomocí $\boldsymbol{x}$, bohužel chybně, pouze zaměnila písmeno $\boldsymbol{x}$ za písmeno $\boldsymbol{s}$ (viz obrázek 72).



Obrázek 72

V tu chvíli měla vyjádřeno vše, co potřebovala, proto sestavila vzorec pro výpočet celkové útraty $(x + 5) \cdot m + x \cdot p$. Kvůli chybnému vyjádření ceny lentilek byl chybný, postup byl ale jinak v pořádku. U Ž3 se ale již podruhé projevil problém při vyjadřování vztahů pomocí zadaných proměnných. Pokud si může označení proměnné (neznámé) sama zvolit, vyjádří vztah správně, v opačném případě dělá chyby.

Úloha 6

Tato úloha šla všem žákyním velmi dobře, až mě znejistělo, jestli pro ně není příliš jednoduchá, nebo jestli jsem si nevybrala příliš chytré žákyně. Postupovaly tak, že si každou z možností rozepsaly, spočítaly a porovnaly se zadáním.

Zajímavě se potýkala s možností e) Ž3. Protože jí zřejmě není blízká práce s písmeny, rozhodla se za $\boldsymbol{x}$ dosadit číslo 3, výraz upravit a podle toho pak analogicky provést výpočet obecně s proměnnou $\boldsymbol{x}$. Počítala tedy: $\frac{3}{1} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. Pod to začala vyjadřovat výraz $\frac{x}{1} - \frac{1}{3} = \frac{3x}{3} - \frac{1}{3}$, v této fázi se však zarazila, zřejmě proto, že od sebe neuměla odečíst čitatele, když jeden obsahoval proměnnou a druhý ne, a tak ke druhému zlomku připsala $\boldsymbol{x}$. Nyní již napsala $\frac{3x}{3} - \frac{1x}{3} = \frac{2x}{3}$ a vyhodnotila tedy možnost e) za nesprávnou. Zeptala jsem se, jak k tomu došla, a začaly jsme si o tom povídat. Měla jsem ji navést k tomu, aby si zkusila do výsledného výrazu dosadit zvolené číslo 3 a porovnala to se svým předchozím výpočtem, postupně ji tak dovést k tomu, proč nemůže jen tak do čitatele zlomku přidat $\boldsymbol{x}$. To jsem neudělala, místo toho jsem jí rovnou řekla, co má špatně, a nutila ji, aby si ten zlomek vyjádřila obecně. Myslím, že mi to sice odsouhlasila, ale asi to moc nepochopila (nebo alespoň pochybuji, že by ten postup příště použila).

Úloha 7

U úlohy 7 zaskočila Ž1 netypičnost. V první možnosti se chvíli snažila o geometrické řešení vizuálním srovnáním délek úseček, ale stačilo se jí zeptat, jak by vyjádřila délku dané úsečky a řešení celé úlohy (algebraicky) pro ni bylo rázem snadné.

Ž2 také nejdřív nevěděla, jak má k úloze přistupovat, proto jsem se zeptala, jak by vyjádřila nebo vypočítala délku úsečky v možnosti A). Nejprve uvedla $5x$. Když jsem se zeptala, jak by byla úsečka dlouhá, kdyby měl úsek označený písmenem x délku 2, opravila se a správně určila délku celé úsečky jako součet $5 + x$. Ostatní možnosti pro ni již byly jednoduché, pouze u D) udělala chybu u vyjádření délky úsečky složené z úseků délek x a x, kde uvedla délku x^2. Ale byla to zřejmě spíš chyba z nepozornosti, protože když jsem se jí na to zeptala, tak se opravila správně.

Ž3 si nejprve sečetla výraz v zadání $2x + 3x = 5x$. Potom začala přemýšlet nad možnostmi. Překvapila mě její úvaha hned u první možnosti – místo toho, aby určila délku úsečky jako součet jednotlivých částí a porovnala ji s výrazem v zadání (algebraický přístup), vzala to opačně. Výraz $5x$ pro ni znamenal délku takové úsečky, do níž se úsečka délky x vejde pětkrát (geometrický přístup). Tuto svou představu srovnala s obrázkem – úsek délky x se na první pohled do dané úsečky tolikrát nevešel. Pracovala tedy s délkou x, jako by byla pevně daná (písmeno x brala jako neznámou, pevně danou hodnotu), nevzala v úvahu, že by se mohlo jednat o proměnnou. Stejným způsobem postupovala i v možnosti B), kde pouze odhadovala, zda se úsečka délky x vejde do celé úsečky pětkrát. Možnosti C) a D) řešila standardně, vyjádřila si obsah obdélníku a porovnala se zadáním.

Úloha 8

Tato úloha žákyním problémy nedělala kromě možnosti b), kterou jsem pro snazší pochopení mírně přeformulovala: „Počet okurek celkem, když v každé z c zavařovacích sklenic je d okurek a jedna okurka se do sklenic nevešla".

Úloha 9

Úlohu 9 vnímám jako lehce problematickou, zejména možnost b). Ž1 měla opět problém vnímat písmena jako proměnnou vyjadřující počet, neustále je používala ve významu konkrétních objektů (např. x je balení šesti vajec, x jsou celá vajíčka, y jsou rozbitá vajíčka, x je jedno vajíčko). Zvlášť u varianty b) se toto chápání projevilo jako problematické.

Ž2 už byla u této úlohy zřejmě dost unavená, musela jsem jí napovídat. U možnosti b) jsem jí nakonec řešení prozradila, protože jsme se nemohly pohnout z místa a už jsem sama nevěděla, jak ji navést.

Ž3 si v úloze 9 označovala, co v jednotlivých možnostech znamenají proměnné x, y, a díky tomu byly zřejmě její úvahy správné. V možnosti c) si počet chlapců i dívek označila správně, ale rovnici zapsala chybně pouze s jednou proměnnou x, asi chyba z nepozornosti.

Vyhodnocení pilotní studie

Na základě nejasností, které žáci vyslovili žáci v průběhu rozhovorů, jsem upravila úlohy, které jsou použité v hlavní studii. Náhled upraveného testu je uveden v příloze 2.

3.2 Popis hlavní studie

Hlavní šetření jsem uskutečnila na ZŠ Kladská v Praze, tedy na stejné škole jako pilotní studii. Mezitím však začal nový školní rok a žáci, kteří se do výzkumu zapojili, byli tedy z jiného ročníku. Učitelka matematiky, která mi ochotně zajistila podmínky pro pilotní studii, mi nabídla pomoc i v další fázi výzkumu. Požadavky na výběr žáků byly podobné jako u pilotní studie – věk odpovídající devátému ročníku, průměrné výkony v matematice a dobré komunikační schopnosti. Navíc jsem usilovala o co nejvyváženější poměr zastoupení chlapců a dívek ve vzorku. Při konzultaci se ukázalo, že výběr nebude jednoduchý. Tento rok učí učitelka v devátém ročníku pouze jednu třídu, ve které jsou velké rozdíly ve výkonech, a přestože jsou ve třídě žáci, kteří dostali na vysvědčení známku 3, čistý střed ve třídě prakticky chybí. Postupně jsme nakonec vybraly osm žáků, z toho čtyři chlapce a čtyři dívky. Označuji je v návaznosti na pilotní studii podle pořadí, v němž se rozhovory uskutečnily, symboly Ž4 až Ž11. Většina z nich je podle známek na vysvědčení v matematice mírně nadprůměrná (Ž4, Ž6, Ž8, Ž10, Ž11), dva žáci jsou průměrní (Ž5, Ž7) a jedna žákyně podprůměrná (Ž9), ta dělala v předcházejícím ročníku reparát. Dva žáci měli výraznější problém s vyjadřováním (Ž5, Ž11), na což jsem byla dopředu upozorněna, ale upřednostnila jsem raději kritérium průměrného výkonu před komunikačními schopnostmi. (Ž11 je z česko-německé rodiny a žije pouze s otcem, který mluví Německy.)

Rozhovory probíhaly stejně jako u pilotní studie v místnosti, kde některé dny v týdnu probíhají konzultace školního psychologa. Ve dnech konání rozhovorů jsem měla tuto místnost volně k dispozici, nebyli jsme tedy rušeni ani rozptylováni (kromě občasných kontrolních návštěv učitelky matematiky). Průběh rozhovorů byl nahráván na videokameru. Většina žáků při příchodu netušila, co je čeká, proto jsem jim před zapnutím kamery stručně vysvětlila účel rozhovoru a co se bude dít. Žáci vstupovali po jednom a vždy dostali vytištěné zadání úloh. K dispozici měli i čisté papíry na poznámky a kalkulačku. Byli požádáni, aby škrtali jednou nebo dvěma čarami a aby o svých úvahách a nápadech mluvili nahlas, abych lépe pronikla do jejich řešitelského procesu. Během řešení úloh byly žákům pokládány i dotazy ohledně obtížnosti a zajímavosti úloh.

Doba na vypracování testu se u jednotlivých žáků velmi lišila, pohybovala se od 60 do 97 minut. Důvodem byly jak problémy s řešením některých úloh, tak i ochota některých žáků o způsobech řešení i o úlohách samotných hovořit.

Žák	Pohlaví	Známky na vysvědčení	Oblíbenost matematiky	Délka rozhovoru (přibližně)
Ž4	dívka	2 – 3	Nemá ji ráda.	60 min
Ž5	chlapec	3	Nevadí mu.	65 min
Ž6	chlapec	2 – 3	Nemá ji rád.	80 min
Ž7	chlapec	3	Oblíbený předmět.	74 min
Ž8	dívka	2	Nemá ji ráda.	80 min
Ž9	dívka	3 – 4	Nemá ji ráda (kromě slovních úloh).	97 min
Ž10	dívka	2 – 3	Baví ji.	86 min
Ž11	chlapec	2 – 3	Baví ho (kromě geometrie).	84 min

Nahrané rozhovory a písemná řešení žáků jsem podrobila zkoumání s cílem zjistit problematická místa v procesu řešení a popsat chyby, kterých se žáci při řešení dopouštějí. Rozhovory jsem vyhodnocovala podle řešených úloh, u kterých jsem se pokusila vždy na konci o stručné shrnutí toho nejpodstatnějšího. Zahrnuji do tohoto shrnutí i zajímavé situace a problémy, které se objevily u žákyň v pilotní studii, protože úlohy použité v hlavní studii se od pilotní studie lišily pouze drobnými změnami ve formulaci zadání a tyto změny neměly zásadní vliv na způsob, jak žáci úlohy řešili. Dále následuje popis jednotlivých úloh. Žáky, kteří danou úlohu řešili bez potíží, v textu většinou neuvádím.

Úloha 1a

Ž4 uvedla, že by všude ve vzorci doplnila znaménka plus. Na otázku, proč, odpověděla: „No, protože se to musí, že jo, sečíst. To je blbost, aby se to odečítalo, když se jakoby hodnotí jakoby nejlepší kuchyň.“ Vyjádřila jsem pochybnost, zda si Ž4 dobře prohlédla tabulku, a zeptala jsem se, jestli chápu správně její úvahu, že čím víc bodů kuchyň má, tím je to pro ni lepší. Ž4 se při těch slovech pozastavila u sloupce s hodnotami Energetické náročnosti a řekla, že si radši ještě jednou pročte zadání, což následně udělala. Také si pozorně prohlédla tabulku a podle toho, kam ukazovala propiskou, si myslím, že ověřovala, jestli platí vztah: čím více bodů za dané kritérium kuchyň dostane, tím je to pro ni výhodnější. Poté uvedla, že by před Energetickou náročnost napsala znaménko mínus. Odůvodnila to tím, že u kritéria Energetická náročnost je větší počet bodů vlastně nevýhoda. Domnívám se, že příčinou počátečního chybného řešení bylo, že Ž4 nevěnovala dostatečnou pozornost přečtení tabulky.

Ž6 se zpočátku v úloze vůbec neorientoval. Nejprve se ptal, jestli se do vzorce mají doplňovat výrazy $+a$ a $-a$, nebo znaménka $+$ a $-$ (zřejmě ledabyle přečetl zadání, kde se mezi znaménky vyskytovala spojka „a“). Po vyjasnění zapsal znaménko + do prvního rámečku. Vzápětí se zeptal, co znamená toto znaménko pro výraz $5F$, jestli si má jako za *F* vybrat jednu z hodnot ve sloupci Funkčnost v tabulce. Pokusila jsem se Ž6 uvést konkrétní příklad výpočtu celkového hodnocení (pro kuchyň K1) a na něm osvětlit, jak se celkové hodnocení kuchyní počítá. Poté jsem se zeptala, jestli již rozumí, co se po něm v úloze chce. Ž6 opáčil otázkou, jestli se dá řešení odvodit nebo jestli je to věc názoru. Potom přiznal, že asi úlohu nechápe. Proto jsem úlohu zadala z jiného úhlu pohledu a postavila Ž6 před problém určit způsob, jak by se dalo na základě dat v tabulce vyhodnotit, která kuchyň je nejlepší. Ž6 nejprve navrhl vypočítat průměr hodnot *F*, *B*, *U*, *V*. Postupně jsme procházeli tabulku a ujasňovali si, které kuchyně jsou v rámci jednotlivých kritérií nejlepší a které nejhorší. V průběhu rozhovoru dospěl Ž6 velmi rychle k tomu, že bude výhodnější místo počítání průměru využít sčítání. V této fázi jsem mu ukázala na podobnost s předepsaným vzorcem a Ž6 již úlohu bez potíží vyřešil.

V řešení Ž7 se vyskytly dva zajímavé momenty. Prvním byl problém podobně jako u Ž6 uchopit nějak předepsaný vzorec. Ž7 totiž uvedl, že vzorec nechápe, protože vypadá jinak než ty, na které jsou zvyklí ve škole. Jako příklad vzorců, se kterými ve škole pracují, uvedl $(a+b)^2$ nebo $(a-b)^2$. Zareagovala jsem na to sdělením, že zde se jedná o vzorec vymyšlený, a rozhodla jsem se mu jako příklad uvést jinou úlohu, na které bych ukázala, odkud se takový vymyšlený vzorec vezme. Vymyšlená úloha byla podobná úloze o kuchyních, pouze se týkala výběru aut, u kterých se bodovala kritéria Motor, Rychlost a Vzhled. Ž7 měl na základě jednoduché vyplněné tabulky určit způsob, jak vyhodnotit, které auto je nejlepší. Ž7 nejprve navrhl udělat průměr udělených bodů s tím, že nejlepší auto by bylo to, které by mělo nejvyšší počet bodů, ale poté, co jsem napsala konkrétní hodnoty na papír, mu připadalo lepší body pouze sečíst. Chtěla jsem, aby pomocí písmen *M* (Motor), *V* (Vzhled) a *R* (Rychlost) zapsal postup, jak to počítal. Ž7 ale vzorec zapsat nedokázal (přestože slovně postup popsal správně), proto jsem nakonec vzorec sama napsala. Potom Ž7 bez váhání doplnil do vzorce v úloze 1a samé plusy. Pobavila mě jeho odpověď na otázku, proč si myslí, že se v zadání zmiňuje znaménko mínus – Ž7 uvedl, že je tam možná proto, aby ho zmátlo. Požádala jsem tedy Ž7, aby mi popsal data obsažená v tabulce. S popisem dat a vyhodnocováním, které kuchyně jsou v rámci hodnocení jednotlivých kritérií nejlepší, Ž7 potíže neměl, ani u problematické Energetické náročnosti.

Druhým zajímavým momentem byla žákova úvaha nad kritériem Energetická náročnost, když jsem se zeptala, jaký vliv má hodnocení tohoto kritéria na celkové hodnocení kuchyní. Ž7 uvedl, že v celkovém hodnocení by to výsledek spíše horšilo, takže by to potřebovalo nějak převést, aby to bylo lepší. Postupně navrhoval udělat s proměnnou *U* ve vzorci tyto operace:

1. Vynásobit $\boldsymbol{U}$ ve vzorci nějakým číslem, například 3.
2. Najít průměr všech hodnot ve sloupci Energetická náročnost a tím vynásobit $\boldsymbol{U}$ ve vzorci.
3. Vydělit $\boldsymbol{U}$ ve vzorci (neuvedl čím, ale domnívám se, že myslel nějakým celým kladným číslem).
4. Vynásobit hodnoty ve sloupci Energetická náročnost různými čísly tak, aby kuchyň s nejvyšším počtem bodů měla po vynásobení bodů nejméně a naopak kuchyň s nejnižším počtem bodů měla po vynásobení bodů nejvíce (aby se obrátilo pořadí kuchyní).

První návrh zavrhl poté, co vyzkoušel vynásobit hodnoty Energetické náročnosti v tabulce číslem tři. Druhý a třetí návrh jsem mu vyvrátila já s odvoláním na předchozí zkušenost, kde se vynásobením (stejně tak vydělením) sice změnily rozdíly v bodovém ohodnocení kuchyní, ale poměr zůstal stále stejný (tedy i pořadí jednotlivých kuchyní). V posledním případě jsem Ž7 připomněla zadání úlohy 1a a to, co vlastně hledá. Potom jsem se rozhodla vrátit opět k úloze o autech. Přidala jsem kritérium Spotřeba, které bylo hodnoceno podobně jako u Energetické náročnosti – čím větší spotřebu auto mělo, tím víc dostalo bodů. Ž7 po chvíli navrhl, že by ve vzorci body za Spotřebu odečetl. Vysvětlit to nedokázal, ale byl přesvědčený, že to tak je správně.

Ž8 přiznala, že neví, jak se do řešení pustit. Rozhodla jsem se použít „pomocné" úlohy o modelkách. Vytvořila jsem tabulku, ve které byly tři modelky hodnoceny podle tří kritérií tak, že čím lepší daná modelka byla podle daného kritéria, tím více dostala bodů. Na otázku, jak by určila, která modelka je podle hodnocení v tabulce nejlepší, Ž8 odpověděla, že by udělala průměr bodů pro každou modelku a ty by porovnala. Výpočet bez nesnází provedla a na mou žádost zapsala vzorcem i způsob výpočtu $(V + S + Z): 3$. Potom jsme se vrátily k úloze 1a a Ž8 se rozhodla doplnit do vzorce všude znaménka plus. Nechala jsem Ž8 projít data v tabulce (v úloze 1a) a určit, které kuchyně jsou v rámci jednotlivých kritérií nejlepší a nejhorší. U Energetické náročnosti si nevšimla, že je to opačně, zřejmě tedy nečetla důkladně zadání (nebo to kvůli času strávenému na „pomocné" úloze stihla zapomenout). Opět jsme opustily úlohu o kuchyních a vrátily se k úloze s modelkami, kde jsem k hodnocení modelek ještě přidala kritérium Nákladnost, které mělo podobné vlastnosti jako Energetická náročnost (čím více spotřebuje modelka peněz, tím více dostane bodů). Vyjádřila jsem se v tom smyslu, že nyní se již ty body nemohou sčítat, protože by vycházela nejlépe modelka s vysokým hodnocením kritéria Nákladnost, které ale vlastně vypovídá o opaku. Ž8 se k tomu vyjádřila, že by body za Nákladnost odečetla. Pak na základě toho doplnila znaménko mínus i před Energetickou náročnost do vzorce v úloze 1a.

Ž9 také nevěděla, jak se do úlohy pustit (nechápala, proč se mají doplňovat znaménka $+$ a $-$, a ptala se na význam koeficientů ve vzorci). Stejně jako u předchozího žáka jsem začala před Ž9 konstruovat úlohu s modelkami. Na otázku, jak by podle uvedených bodů v tabulce vyhodnotila, která modelka je nejlepší, Ž9 odpověděla, že by body sečetla. Chtěla jsem, aby výpočet zapsala vzorcem, což se jí podařilo až na podruhé (nejprve uvedla $3 \cdot V$). Poté Ž9 již začínala chápat, jaký asi význam má v úloze 1a znaménko plus, přesto jsem ji nenechala úlohu o modelkách opustit a úlohu jsem rozšířila přidáním kritéria Nákladnost (N). Ž9 byla nejprve zmatená, jestli vyšší počet bodů za toto kritérium je výhodou či není, ale po vyjasnění postupně navrhovala tyto možnosti, jak by se dala určit nejlepší modelka:

- Sečíst body za všechna kritéria hodnocení, tedy $V + P + S + N$.
- Vybrat nejlepší modelku podle součtu bodů za první tři kritéria a potom vybrat nejlepší modelku podle kritéria Nákladnost; z těchto dvou dílčích výsledků určit nejlepší modelku selským

rozumem. (V konkrétním případě, který Ž9 řešila, vyšla v obou případech nejlépe stejná modelka, závěr byl tedy zřejmý.)

- Udělat jakýsi „průměr“ tak, že se součet bodů za první tři kritéria vydělí počtem bodů za Nákladnost, tedy $\frac{V+P+S}{N}$.
- Zopakovala nápad všechny body sečíst.
- Navrhla body za Nákladnost odečíst, tedy celkové hodnocení počítat podle vzorce $(V+P+S)-N$.

Poslední návrh padl poté, co jsem Ž9 zopakovala, že u prvních tří kritérií platí, že čím víc bodů za ně modelka dostane, tím je lepší, zatímco u Nákladnosti čím víc bodů dostane, tím je horší. Zajímavý byl závěr úlohy, kdy jsem se nad zápisem řešení $(V+P+S)-N$ zeptala, jestli tam musí být uvedena závorka. Ž9 se domnívala, že ano, protože jinak by se prý N odečítalo pouze od S, a ještě dodala, že když by se závorka vynechala, musela by se změnit znaménka.

Ž10 se nejdříve zabývala významem koeficientů ve vzorci, až potom začala řešit úlohu samotnou. Také nechápala, proč má do vzorce dosazovat znaménka $+$ a $-$, na což pomohla stejná otázka jako u ostatních žáků, jak by nejlepší kuchyň na základě dat v tabulce určila ona. Řešení odvodila správně, ale až v závěru jí došlo, jak to souvisí s uvedeným vzorcem. Podle mě to ukazuje na malou zkušenost žáků pracovat se vzorci.

Shrnutí úlohy 1a

Někteří žáci si nevěděli rady s řešením pravděpodobně proto, že špatně přečetli zadání nebo jej přečetli jen částečně. Typické bylo, že si prohlédli zadání, ale již nezkoumali tabulku. Nejsem schopná přesně určit, kteří žáci byli na počátku neúspěšní právě z tohoto důvodu, protože jsem to většinou odhalila až později a u některých žáků si tím nejsem jistá.

Největším problémem žáků v této úloze bylo pravděpodobně nějak uchopit předepsaný vzorec, kterému většina z nich nerozuměla a který je mátl. Ukazuje to podle mého názoru na malou zkušenost žáků se vzorci. Myslím si, že pokud by byla úloha postavena tak, aby žáci měli sami najít způsob (vzorec), jak by se dalo celkové hodnocení určovat, rovnou by se zamýšleli nad hodnotami v tabulce a úlohu by alespoň teoreticky vyřešili (problém by mohl nastat při zápisu vzorce). Usuzuji tak na základě mé nejčastější nápovědy, kterou jsem žákům (Ž2, Ž6, Ž7, Ž8, Ž9, Ž10) poskytla, když nevěděli, jak se do úlohy pustit – položila jsem jim otázku, jak by na základě dat z tabulky určili nejlepší kuchyň oni.

U Ž8 a Ž9 jsem ne příliš vhodně použila budování „pomocné“ úlohy, která byla velice podobná úloze o kuchyních, pouze s jiným kontextem. Byla to okamžitá improvizace v dané situaci, kdy mě napadlo, že když žáci budou u sestavování podobné úlohy, podaří se jim do ní lépe proniknout. Nebylo to ale zrovna šťastné. Ukázalo se, že tito žáci strávili zbytečně mnoho času u první úlohy, přičemž se unavili a stejně do úlohy příliš hluboce nepronikli, protože jsem jim některé odpovědi podsouvala, aniž by museli chápat, proč to tak je. Také pro ně bylo jistě zmatečné přebíhat stále mezi dvěma úlohami. Mnohem vhodnější by bylo rovnou zaměřit jejich pozornost na tabulku, která byla v úloze klíčová.

Za zajímavý považuji i fakt, že se u žáků (např. Ž6, Ž7, Ž8) často objevovala tendence využít při řešení aritmetický průměr. Nápad použít průměr se u žáků vyskytoval i v úlohách 1b a 1d. Domnívám se, že žáci podle charakteru úlohy cítí podobnost s úlohami, se kterými se setkali během výuky statistiky. A protože se většina statistických úloh, s kterými měli nějaké zkušenosti, řešila s využitím průměru, snažili se jej uplatnit i zde.

Úloha 1b

S touto úlohou měli žáci nejméně problémů, dosazování do vzorce je pro ně zřejmě rutinní záležitost. Přijde mi ale zajímavé, že mnozí žáci (Ž2, Ž5, Ž6, Ž8, Ž9, Ž10) chtěli nejprve počítat celkové hodnocení kuchyně podle vzorce $F + B - U + V$, případně jako aritmetický průměr těchto hodnot. Po mém upozornění, že se zde míní, že využijí vzorec pro celkové hodnocení z úlohy 1a, provedli žáci výpočet (až na občasné numerické chyby) správně. Domnívám se, že žáci měli zřejmě problém uchopit kvůli přítomným koeficientům vzorec v úloze 1a a raději se vrátili ke své prvotní intuitivní představě, jak celkové hodnocení vypočítat. Jistě to bylo způsobeno i mým přístupem k situaci v úloze 1a, kdy si žáci nevěděli rady – vedla jsem je k vytvoření vlastní představy vzorce pro celkové hodnocení, který koeficienty samozřejmě neobsahoval. Nepochopení, proč jsou ve vzorci koeficienty uvedeny, dokládají otázky některých žáků (podobné otázky se objevovaly v úlohách 1a – 1d), například:

Ž8: „No, nechápu moc, proč je tady ta pětka," pozastavuje se nad významem koeficientů ve vzorci.[216]

Ž9: „A nevím, co znamenaj tyhle čísla, jako by, protože, jestli je to nějakej průměr z toho, nebo já nevím."[217]

Ž9: „No, přeskládali. Já nevím. Já hlavně furt nevím, co tam prostě těch pět, nula celá osm..."[218]

Ž10: „No, jako že, docela jo, ale moc nechápu, co znamená tady to u těch, no, čtverečků. Ty čísla."[219]

Úloha 1c

Ž4 s řešením úlohy 1c problémy neměla, zajímavá byla však situace na konci úlohy, kdy Ž4 v důsledku numerické chyby vyšel záporný výsledek. Ž4 tím byla velmi zaskočená a v první chvíli se dívala do zadání, jestli tam náhodou není uvedeno, že hodnocení kritéria Vzhled může být záporné. Sama si ale zřejmě byla vědoma toho, že to možné není, což vzápětí vyslovila i nahlas. Nevěděla si rady, jak výsledek interpretovat. Na mou pobídku, aby se zkusila zamyslet nad tím, jak tam ta záporná hodnota mohla

[216] Přepis osmého rozhovoru, odst. 126.
[217] Přepis devátého rozhovoru, odst. 21.
[218] Přepis devátého rozhovoru, odst. 311.
[219] Přepis desátého rozhovoru, odst. 13 a 15.

vyjít – co to znamená pro ta dvě čísla, která od sebe odečítáme – Ž4 odpověděla, že jedno musí být menší, načež usoudila, že tedy kuchyň K5 musí mít lepší celkové hodnocení než kuchyň K1.

Ž5 bez počítání a ověřování odpověděl, že by kuchyň K5 musela dostat za Vzhled tři body. Jako důvod uvedl, že to je nejvyšší možné hodnocení a že čím víc kuchyň dostane bodů, tím bude mít lepší hodnocení. Vůbec neuvažoval a ani neprověřoval, jestli to tak skutečně podle vzorce pro celkové hodnocení vyjde. Po této odpovědi jsem zkoumala, jestli si je Ž5 vědom toho, že existují i další řešení, což Ž5 předpokládal, a tak jsem po něm chtěla, aby mi našel nejmenší možné. Ž5 řešení uchopil porovnáváním celkového hodnocení kuchyně K5 s celkovým hodnocením kuchyně K1. Vyjádřil si celkové hodnocení K5 výrazem $12{,}6+V$ a potom se snažil z hlavy dopočítat, kolik musí dosadit za V, aby dostal větší hodnotu než 15,26 (celkové hodnocení K1). Nenapadlo ho použít odčítání a ještě počítal z hlavy, proto se zřejmě dopustil mnoha chyb. Jako první množinu řešení uvedl hodnoty 3; 2,9; 2,8; 2,7; 2,6; 2,5 a 2,4. Chtěla jsem, aby si řešení zkontroloval, načež množinu řešení omezil na hodnoty 3; 2,9; 2,8 a 2,7. Ž5 vůbec neuvažoval, že by řešením mohl být celý interval. Potvrdil to i tím, když na mou otázku, jestli jsou to všechna řešení, odpověděl, že ano. Proto jsem mu uváděla další příklady čísel z intervalu (2,7; 3) a ptala se, jestli náhodou také nejsou řešením. Ž5 potom rozšířil množinu řešení o další hodnoty, které zahrnovaly i čísla s dvěma desetinnými místy (myslím si, že v tu chvíli už měl Ž5 představu, že do množiny řešení patří i další čísla z daného intervalu, jen to neuměl vyjádřit – zřejmě byl zvyklý popisovat množinu řešení pomocí výčtu prvků, což zde nešlo). Dále se i zde, podobně jako u některých předchozích žáků, projevil problém s hledáním dolní hranice intervalu, který by byl řešením úlohy. Ž5 se stále domníval, že dolní hranicí je hodnota 2,7, protože pro hodnotu 2,6 už to neplatilo. Znovu jsem kladla Ž5 příklady hodnot, u kterých měl určit, zda jsou ještě řešením (čísla 2,69; 2,669). Ž5 se při dopočítávání ztrácel, proto jsem mu poradila, ať využije odčítání ($15{,}26-12{,}6$). Potom už Ž5 úlohu bez problémů dořešil.

Ž6 se rozhodl za proměnnou V u celkového hodnocení kuchyně K5 dosadit hodnotu 2 (tedy stejnou, jakou byl ohodnocen Vzhled u kuchyně K1). Celkové hodnocení kuchyně K5 mu tedy vyšlo 14,6. Z toho usoudil, že by K5 musela získat za Vzhled alespoň tři body, aby byla lepší než K1 (opět se zde objevila tendence nepracovat s reálnými čísly). Na mou otázku na počet řešení však Ž6 připustil možnost, že je řešení více než jedno. Po chvilce dokonce řekl, že řešením bude ještě hodně čísel. Chtěla jsem tedy, aby mi nějaké další řešení našel. Ž6 napadlo odečíst celková hodnocení kuchyní K1 a K5 od sebe s tím, že by celkové hodnocení kuchyně K5 nejprve snížil o dosazenou hodnotu $V=2$, kterou nyní vlastně chce vypočítat. Pak již úlohu vyřešil.

Ž7 řešil úlohu standardně a bez potíží. V závěru se u něj ovšem projevil stejný problém jako u ostatních žáků určit dolní hranici intervalu, ve kterém se nachází řešení úlohy – Ž7 se dopočítal k číslu 2,66 a z toho usoudil, že aby bylo celkové hodnocení kuchyně K5 větší než celkové hodnocení kuchyně K1, musela by K5 získat za Vzhled 2,67 bodů. Po mé otázce, zda by nestačilo, kdyby K5 za Vzhled získala 2,669 bodů, své řešení Ž7 opravil.

Ž8 po přečtení zadání uvedla, že by kuchyň K5 musela získat za Vzhled asi víc než dva body. Soudila tak z porovnání hodnot v tabulce ve sloupci Vzhled mezi kuchyněmi K1 a K5. Pro potvrzení zkusila sečíst body v řádcích kuchyně K1 a K5 (tedy $F + B + U + V$), což jí vyšlo u obou kuchyní stejně. Po námitce, že ale musí celkové hodnocení kuchyní počítat podle vzorce z úlohy 1a, postupovala podobně jako ostatní žáci a dopočítala se k výsledku $V = 2{,}66$, který i správně interpretovala. Nicméně při zápisu řešení nejprve jako řešení uvedla nerovnost $2{,}66 > 3{,}0$. Když jsem jí přečetla, co tím vlastně zapsala, vylepšila Ž8 zápis takto: $2{,}66 > x > 3{,}0$. V té chvíli jsem ji již upozornila na obrácená znaménka nerovnosti. Obě jsme přehlédly, že druhá nerovnost má být neostrá.

Ž9 zřejmě na první přečtení úlohu nepochopila, protože jako řešení uvedla, že by K5 musela získat více než 15,26 bodů. Potom se rozhodla vypočítat celkové hodnocení kuchyně K5 a za V náhodně dosadit číslo 2 (nemělo to souvislost s hodnocením Vzhledu kuchyně K1). Dopracovala se k tomu, že celkové hodnocení K5 je menší o 0,66 bodu než celkové hodnocení kuchyně K1. Z toho usoudila, že číslo tři je jistě řešením úlohy. Chtěla jsem vědět, jestli existuje ještě i jiné řešení, načež se Ž9 metodou pokus – omyl postupně dopracovala i k hodnotám 2,9 a 2,8. Pokračovala by tak jistě i dál, ale upozornila jsem ji na vypočítanou hodnotu 0,66 a Ž9 pak našla všechna řešení rychleji.

Ž10 také nejprve pochopila úlohu jinak, protože bez výpočtu odpověděla, že by kuchyň K5 musela dostat v celkovém hodnocení alespoň 15,27 bodů. Po upřesnění zadání počítala podobně jako ostatní žáci celkové hodnocení kuchyně K5 bez Vzhledu a určila rozdíl mezi tímto celkovým hodnocením a celkovým hodnocením K1. I zde se projevil problém určit dolní hranici intervalu řešení. Nejprve Ž10 uvedla, že by *V* muselo být 2,67 a vyšší. Když jsem se ptala, jestli řešením nemůže být třeba i číslo 2,661, Ž10 opravila své řešení tak, že tedy *V* může být 2,661 a vyšší. Že se konkrétní minimální hodnota nedá určit, odhalila až po mé další otázce, zda náhodou není řešením i číslo 2,6601. Navrhla, jestli by se výsledek nedal nějak zaokrouhlit. Ke správnému řešení nakonec ale došla, když jsem se jí zeptala, co přesně pro celkové hodnocení K1 a K5 znamená vypočítaná hodnota Vzhledu 2,66.

U Ž11 se objevil stejný problém s určením spodní hranice intervalu řešení jako u ostatních žáků. Aby bylo celkové hodnocení kuchyně K5 vyšší než celkové hodnocení kuchyně K1, chtěl Ž11 k hodnotě 2,66 přičíst jedničku. Cítila jsem zde silný vliv zkušenosti z úloh, kde se počítá s přirozenými (případně celými) čísly. Jako další možný návrh řešení uvedl Ž11 hodnotu 2,67. Po mé otázce, zda není řešením i hodnota 2,661, se pokusil svou odpověď zobecnit tak, že řešením může být cokoliv, jakkoliv dlouhé číslo (myšleno co do počtu desetinných míst), ale musí být alespoň o jedno větší (myšleno na libovolném desetinném místě) než 2,66. Poté řešení zapsal takto: $V_{K5} > 2{,}66$ a slovy dodal, že nejvíce může být $V = 3$.

Shrnutí úlohy 1c

Nejčastější strategie, kterou žáci při řešení této úlohy používali, bylo vypočítání celkového hodnocení kuchyně K5 a potom určení rozdílu mezi celkovým hodnocením K5 a celkovým hodnocením kuchyně K1. Při výpočtu celkového hodnocení kuchyně K5 se vyskytovaly tři způsoby, jakým žáci ošetřili neznámý počet bodů za Vzhled. Buď jej prostě vynechali, nebo si pomohli dosazením nějaké konkrétní hodnoty anebo si počet bodů za Vzhled označili písmenem, nejčastěji V.

Až na výjimky všichni žáci našli alespoň jedno řešení, většina z nich si byla vědoma toho, že je řešení víc. Problém nastal především s hledáním dolní hranice intervalu řešení, což dle mého názoru ukazuje na malou zkušenost počítání s reálnými čísly. Žáci měli tendence pracovat buď v oboru přirozených čísel, nebo si množinu reálných čísel upravit omezením na určitý počet desetinných míst (nejčastěji jedno či dvě), tedy si vlastně vytvořit jakýsi diskrétní model. Takto pak mohli určit řešení pomocí výčtu prvků. Většina žáků nakonec došla ke správnému výsledku, bohužel jsem po nich ale nepožadovala, aby výsledek zapsali – to by mohlo být totiž také problémové místo v procesu řešení (soudím tak na základě zápisu řešení Ž8).

Úloha 1d

Ž4 si velmi brzy uvědomila, že v této úloze bude výhodné pracovat s koeficienty tak, aby kuchyň K4 získala co nejvíce bodů za Funkčnost, Bezpečnost a Vzhled, což by vyrovnalo ztrátu za hodnocení Energetické náročnosti. Zpočátku však nedokázala říct, které koeficienty by měla zvýšit či snížit. Pomohlo, když jsem jí navrhla, aby si zkusila nějaký vzorec vytvořit. Tím získala představu, jaký vliv má zvyšování koeficientů před F, B a V na celkové hodnocení kuchyní, a usoudila, že zvýšení koeficientu se vyplatí pouze před proměnnou V. Ostatní koeficienty navrhovala ponechat stejné, jako byly ve vzorci v úloze 1a, nebo zmenšit, čímž si ale nebyla příliš jistá. Navrhla jsem jí, aby vyzkoušela například snížit koeficient před B na 0,1, z čehož Ž4 odvodila, že by se to kuchyni K4 vyplatilo, ale pouze tehdy, když by se na jiném místě ve vzorci body ve zvýšené míře zase přičetly.

Ž5 se nejprve držel myšlenky pracovat se znaménky ve vzorci z úlohy 1a, ale když jsem mu připomněla, proč jsme v úloze 1a před proměnnou U umístili znaménko minus, navrhl Ž5 vynásobit proměnnou V číslem tři (pravděpodobně proto, že před V jako před jedinou proměnnou ve vzorci žádný koeficient nebyl). Bylo znát, že Ž5 zatím do úlohy nepronikl, proto jsem ho nechala ověřit, jestli takový vzorec s přidaným koeficientem bude úloze vyhovovat. Při počítání podle nového vzorce se ukázalo, že si není jistý, co se po něm přesně v úloze chce. Při výpočtu jsem přehlédla, že místo celkového hodnocení kuchyně K1 vypočítaného podle nového vzorce použil Ž5 výpočet z úlohy 1b (provedený podle jiného vzorce). Vyhodnocení však provedl správně – vzorec úloze nevyhovoval. Ž5 při pohledu na tabulku usoudil, že kuchyň K4 má vesměs špatné hodnocení. Poté jsme tedy s Ž5 procházeli tabulku a rozebírali hodnocení kuchyně K4 vzhledem k hodnocení ostatních kuchyní podle jednotlivých kritérií. Ž5 se při tom zeptal, jestli může koeficienty libovolně měnit – zřejmě tedy dosud plně nepochopil zadání. Po mém souhlasu navrhl snížit koeficient před proměnnou U a zvýšit koeficient před proměnnou V (vzhledem ke vzorci z úlohy 1a). Ještě jsme diskutovali o výši koeficientů, přičemž jsem Ž5 doporučila změnit koeficienty výrazně. Ž5 si v této fázi zřejmě již jejich význam uvědomoval, soudím to z jeho odpovědí na mé otázky – například na otázku, jestli by pomohlo zvýšit výrazně koeficient před Vzhledem, odpověděl: „No, jako, ono by se to zvýšilo i u těch ostatních, ale kdybysme tam dali třeba koeficient tisíc, tak by se, tak by tady třeba bylo 2200 a tady by bylo 3000." Ž5 poté ještě navrhl zmenšit koeficient před Bezpečností. Úlohu pak již Ž5 dopočítal bez problémů. Výsledný návrh vzorce vypadal takto: $(5 \cdot F) + (0{,}1 \cdot B) - (2 \cdot U) + (V \cdot 1000)$.

Ž6 nevěděl, jak se do úlohy pustit. Nejdříve navrhl snížit koeficient před proměnnou *U*, aby se kuchyni K4 odečítalo za Energetickou náročnost méně bodů. Při zdůvodňování ale došel k tomu, že si neuvědomil, že daný koeficient ovlivní celkové hodnocení všech kuchyní, a vzal svůj návrh zpátky. Pobídla jsem ho, aby se zaměřil na to kritérium, kde má kuchyň K4 nejlepší hodnocení, a tam se zamyslel nad vhodnou změnou koeficientu. Ž6 vybral jako výhodné pro kuchyň K4 kritérium Vzhled, ale místo koeficientu navrhl změnit před proměnnou V znaménko. Připomněla jsem požadavek v zadání, že vzorec musí odpovídat realitě – vypovídat o kvalitě kuchyně. Ž6 tedy navrhl přidat před proměnnou *V* nějaký velký koeficient. Následovala diskuze nad vhodným koeficientem, po níž se Ž6 rozhodl pro číslo deset: $(5 \cdot F) + (0{,}8 \cdot B) - (2{,}5 \cdot U) + (10 \cdot V)$. Vzorec zadání vyhovoval, což Ž6 bez potíží ověřil.

Ž7 si také nejprve pohrával s myšlenkou na změnu znamének ve vzorci z úlohy 1a. Nechala jsem nejprve Ž7, aby své nápady říkal nahlas, aniž bych na ně bezprostředně reagovala. Zazněly tyto návrhy: změnit znaménko před proměnnou V; přičíst proměnnou U, což by ale nedávalo smysl (zde si Ž7 uvědomil podmínku ze zadání úlohy, že má vzorec vypovídat o kvalitě kuchyně); vynásobit něčím proměnnou F; odečíst proměnnou F; odečíst tu proměnnou, kde má kuchyň K5 nejmenší hodnocení. Posléze s odkazem na podmínky v zadání navrhl pracovat s koeficienty, konkrétně přidat nějaký koeficient před proměnnou V. Zajímavé z hlediska používání matematických pojmů bylo vyjádření Ž7 ohledně velikosti tohoto koeficientu. Ž7 řekl, že by měl být větší než desetinné číslo, tedy větší než jedna. Jako příklad uvedl číslo dva nebo tři. Namítla jsem, že číslo 2,3 je také větší než jedna a je desetinné. Ž7 se tím nenechal vyvést z míry a řekl, že by tam dal koeficient bez desetinného čísla. Když jsem ho opravila, jestli myslí celočíselný koeficient, odsouhlasil mi to. S dalším řešením potíže neměl, ale počítal dvakrát, poprvé podle vzorce $(5 \cdot F) + (0{,}8 \cdot B) - (2{,}5 \cdot U) + (6 \cdot V)$ a po druhé s úpravou koeficientu před (pro kuchyň K4 výhodnou) proměnnou *V* podle vzorce $(5 \cdot F) + (10 \cdot V) + (0{,}8 \cdot B) - (2{,}5 \cdot U)$. Ž7 do úlohy nakonec dobře pronikl, protože dokázal odpovědět i na mé otázky, jak by výsledek ovlivnila změna ostatních koeficientů ve vzorci.

Ž8 řešila tuto úlohu postupnými úpravami vzorce z úlohy 1a, jejichž vhodnost si průběžně ověřovala výpočtem celkového hodnocení kuchyně K4 a K1, až došla ke vzorci $5 \cdot F + 0{,}1 \cdot B - 2{,}5 \cdot U + 10 \cdot V$, který již úloze vyhovoval. V průběhu řešení jako jedna z mála diskutovala i možnost, jestli by před proměnnou *B* mohl být koeficient nula.

V této úloze se u Ž9 naplno projevil problém uchopit koeficienty ve vzorci z úlohy 1a. Nejprve se Ž9 rozhodla, že je při tvorbě nového vzorce vynechá: $(F + V + B) - U$. Neuváženě jsem se zeptala, jestli tedy považuje všechna kritéria za stejně důležitá, na což Ž9 reagovala tím, že kuchyň K4 má Energetickou náročnost největší. Chvilku přemýšlela a pak navrhla změnit vzorec takto: $U + V + F - B$, případně takto: $F + V + B + U$. Podotkla jsem, že takový vzorec nevypovídá o kvalitě kuchyní. Ž9 se zeptala, jestli se má tedy ve vzorci nějak násobit nebo dělit, a navrhla dělit proměnnou U. Na otázku, co by vyšlo, ale sama uvedla, že asi nějaká blbost. Potom se vyjádřila v tom smyslu, že hlavně neví, k čemu jsou ve vzorci v úloze 1a ty koeficienty. Prošly jsme tedy postupně sloupec Funkčnost a sloupec Vzhled v tabulce a Ž9 zkoušela, jaký počet bodů jednotlivé kuchyně dostanou, když se vynásobí koeficientem deset. Ž9 tím získala představu, jak to ovlivní celkové hodnocení jednotlivých kuchyní. Potom již pracovala s koeficienty bez větších problémů.

Ž10 měla nejprve problém pochopit zadání, ale poté, co jsem jej přeříkala vlastními slovy, řešila úlohu bez potíží. Pracovala s myšlenkou vynásobit co nejvyšším číslem ty proměnné, u nichž má kuchyň K4 nejvíce bodů, a došla ke vzorci $F + 5V + B - U$. Na konci jsem se ptala, jak by se daly ošetřit koeficienty před proměnnými, které jsou pro kuchyň K4 nevýhodné, což už si Ž10 neuměla tak snadno představit (musela si vyzkoušet různé hodnoty koeficientů dosadit a srovnat tyto součiny s tabulkou, přičemž závěr jsem za ní v podstatě udělala já).

Shrnutí úlohy 1d

Většina žáků nejprve navrhovala pracovat ve vzorci se znaménky. Někteří žáci si sami uvědomovali, že tím ale poruší vypovídací schopnost vzorce o kvalitě kuchyní, někteří si toho vědomi nebyli. Jako druhý většinou následoval návrh měnit hodnotu koeficientů ve vzorci, zejména zvýšit koeficient před proměnnou V. Některé žáky jsem k práci s koeficienty musela trochu dotlačit, protože nechápali jejich význam. Toho jsem většinou docílila tím, že jsem se ptala, co všechno vzorec pro celkové hodnocení kuchyní z úlohy 1a obsahuje, co z toho by se dalo měnit a jaký vliv by to mohlo na určování celkového hodnocení kuchyní mít.

Za zajímavý jsem považovala i fakt, že většina žáků neznala (nebo alespoň nebyla zvyklá používat) pojem koeficient. Našli se i žáci, kteří měli problém tento pojem vyslovit.

Úloha 2

Tato úloha pro mě byla náročná z hlediska vyhodnocování správnosti odpovědí, protože žáci vymýšleli různé interpretace výrazu 5*j*, na které jsem nebyla připravená a které jsem nedokázala na místě v klidu promyslet. Pokud mě nenapadalo, jak žáka vhodně nasměrovat, snažila jsem se využít nápovědu v podobě čtyř možných odpovědí napsaných na papírku, ze kterých měli žáci vybrat jednu správnou.

Ž4 uvedla, že $5j$ vyjadřuje pět bedýnek, tedy zřejmě v první chvíli chápala písmeno j předmětně, jako by označovalo jednu bedýnku. Na otázku, co přesně písmeno j vyjadřuje, však odpověděla: „Kolik je kilogramů v tý bedýnce."[220] Zřejmě si v tu chvíli pravý význam písmene uvědomila a pak již tedy snadno odvodila, že výraz $5j$ vyjadřuje, kolik kilogramů jahod je v pěti bedýnkách.

Ž5 řekl, že výraz $5j$ znamená, že v bedýnce je pět kilogramů jahod. Zeptala jsem se, co přesně znamená písmeno j, ale Ž5 uvedl, že j znamená nějaké číslo, tedy $5j$ bude znamenat, že v bedýnce je $5j$ kilogramů jahod. Nevěděla jsem, jak se lépe zeptat, proto jsem Ž5 dala na výběr ze čtyř možností. Ž5 bez problémů vybral správně možnost b) počet kilogramů jahod v pěti bedýnkách. Výběr odpovědi zdůvodnil: „No, že v bedýnce, v jedný bedýnce je teda j kilogramů jahod. Ale to když je $5j$, tak je to jakoby pětinásobek tý jedný bedýnky, a proto to bude počet kilogramů v pěti bedýnkách."[221]

U Ž6 jsem v první chvíli myslela, že úlohu vyřešil dobře – uvedl, že $5j$ znamená, že v jedné bedýnce je pětkrát více kilogramů jahod. Nicméně ihned potom také řekl, že kdyby j byl jeden kilogram, tak $5j$ by znamenalo pět kilogramů. Neuvědomoval si tedy rozdíl mezi prvním tvrzením, kde j označovalo počet kilogramů, a druhým, kde *j* zastupovalo jednotku samotnou. K pochopení rozdílu jsem jej ale nepřivedla a správnou odpověď mu podsunula – když jsem se znovu zeptala, co přesně označuje písmeno j, odpověděl správně, při další otázce jsem ale příliš zdůraznila, že j je počet kilogramů *v jedné bedýnce*, proto Ž6 zřejmě odpověděl, že $5j$ je v pěti bedýnkách.

Ž7 uvedl, že písmeno j označuje buď nějakou lahev (nádobu), nebo počet kilogramů. Sám se hned přiklonil k druhé variantě (počtu kilogramů) a $5j$ popsal jako pětinásobek počtu kilogramů v bedýnce. Přesto jsem žádala vysvětlení té myšlenky s lahví. Pochopila jsem to tak, že $5j$ si Ž7 představil jako bedýnku, v které je pět nádob (lahví) o určitém stejném počtu kilogramů jahod. Tedy j by v tom případě označovalo jednu lahev a $5j$ by vyjadřovalo pět lahví obsažených v bedýnce.

Ž9 měla trochu potíže s formulací odpovědi (uvedla, že $5j$ znamená, že je tam pětkrát ten počet, kolik je kilogramů jahod), ale jinak úlohu vyřešila správně.

Ž10 nejprve popsala význam výrazu $5j$ slovy „pět těch bedýnek jahod". Zeptala jsem se, co přesně znamená písmeno j, na což odpověděla, že je to j kilogramů jahod, tedy že $5j$ znamená, že neznámý počet j kilogramů máme pětkrát. Zkusila jsem pro upřesnění odpovědi předložit před Ž10 nápovědu v podobě čtyř možností, ale tím jsem ji akorát zmátla. Sice nakonec označila za správnou možnost b) počet kilogramů jahod v pěti bedýnkách, ale vůbec si nebyla jistá – většina možností jí přišla velmi podobná.

Přestože se mi zdálo, že Ž11 význam výrazu $5j$ chápe, nedokázal zformulovat odpověď. Nejprve jako řešení uvedl zápis $j + j + j + j + j$. Když jsem chtěla, aby mi význam výrazu $5j$ popsal slovně, uvedl

[220] Přepis čtvrtého rozhovoru, odst. 208.
[221] Přepis pátého rozhovoru, odst. 224.

příklad, že kdyby písmeno j bylo tři, $5j$ by znamenalo, že je v bedýnce 15 kg jahod. S tím jsem souhlasila, ale chtěla jsem obecně popsat, co vyjadřuje písmeno j. Ž11 uvedl tyto významy: hodnota, nějaká neznámá, váha. Dala jsem tedy Ž11 vybrat ze čtyř možností, tím jsem jej ale zmátla. Nejprve zavrhl možnost c) kvůli tomu, že v ní nebyla zmínka o jahodách, poté zavrhl i možnost d) a možnost b), kterou nesprávně pochopil (domníval se, že počet kilogramů v pěti bedýnkách znamená vlastně jedno j rozdělené do pěti bedýnek, tedy $\frac{j}{5}$). Po vysvětlení prošel všechny možnosti ještě jednou, tentokrát zavrhl d), protože v zadání nebyla zmínka o ceně, zavrhl i c), protože v něm nebylo slovo kilogram, ale kilo. Nad možností b) váhal, ale pak prohlásil, že mu všechny možnosti připadají stejné. Pomohla mu až moje nápověda, že je důležité si uvědomit význam písmene j, jestli vyjadřuje hmotnost, počet kilogramů, počet bedýnek nebo jednu bedýnku.

Shrnutí úlohy 2

Nejčastěji jsem se u žáků setkala s problémem, že nedokázali rozlišit význam pojmů „jedna bedýnka" (pod tím si většinou představili celý její obsah včetně všech souvisejících vlastností, jako byla hmotnost v ní uložených jahod), „hmotnost jahod v jedné bedýnce" a „počet kilogramů jahod v jedné bedýnce". U dvou žáků se objevil i názor, že j označuje 1 kg, tedy jednotku hmotnosti.

Úloha 3

S touto úlohou žáci příliš problémy neměli.

Ž4 úlohu vyřešila správně, ale v první chvíli se zarazila nad tím, jestli se má násobit třemi celý výraz $n + 5$, nebo jenom číslo pět. K výsledku dospěla poté, kdy jsem se zeptala, jak by musela zadání přeformulovat, aby správnou odpovědí byl výraz $n + 5 \cdot 3$.

Ž6 zapsal jako řešení výraz $3n + 5$. Ani při zdůvodňování svého postupu chybu neodhalil. Proto jsem mu k úloze dopsala ještě výrazy $3 \cdot (n + 5)$ a $n + 5 \cdot 3$, aby je slovně popsal. Přestože jsem mu musela s popisem trochu pomoci (zřejmě není zvyklý na inverzní úlohy tohoto typu), svou chybu odhalil.

Ž10 po přečtení zadání uvedla: „Já jenom si nejsem jistá, jestli myslej přičti n k pěti a vynásob to n třemi, ještě, jako by, anebo to je přičti n k pěti a to vynásob třemi."[222] Chtěla jsem, aby obě možnosti zapsala, což provedla těmito výrazy: $n + 5 + 3n$; $(n + 5) \cdot 3$. Druhý výraz jí nedělal potíže, ale ten první nejen že zapsala odlišně od svého výroku, ale když jsem chtěla, aby podle výrazu $n + 5 + 3n$ sestavila slovní příkaz, co se má zapsat, měla s tím potíže – vynechávala znaménko $+$ před $3n$.

Úloha 4

Ž4 nejprve uvedla, že by se Tomášova váha dala vyjádřit výrazem $t + z + 1$. Poté se opravila a prohodila pořadí sčítanců $z + t + 1$. Není mi jasné, proč jí připadalo důležité to udělat, bohužel jsem

[222] Přepis desátého rozhovoru, odst. 285.

se na to ale nezeptala. Po mých otázkách, co vlastně po ní v úloze chtějí, došla k názoru, že toto řešení není správné, ale další nenavrhla. Zkusila jsem ji tedy k řešení nasměrovat konkrétní otázkou – kolik by vážil Tomáš, když by Zuzka vážila 49 kg – což Ž4 pomohlo a řešení ihned vymyslela.

Ž5 vyjádřil váhu Tomáše výrazem $(t - z) + t$. Svůj postup vysvětlil takto: „Ale tady jsem to myslel tak, že jako by, my víme, že Zuzana váží o jeden kilogram méně než Tomáš, takže jako by $(t - z)$ znázorňuje ten rozdíl a ten bysme přičetli k Tomášovi, takže víme, kolik váží Tomáš.“[223] Chybu Ž5 opravil poté, co jsem zopakovala fakta ze zadání úlohy (rozdíl váhy Tomáše a Zuzky je $(t - z) = 1$, Tomáš váží t kg, chceme Tomášovu váhu vyjádřit pomocí váhy Zuzky).

Ž6 navrhl, že by váhu Tomáše vyjádřil výrazem $t + 1$. Mírně váhal, přesto souhlasil s tím, že váha Tomáše by se spočítala jako jeho hmotnost plus jeden kilogram. Poukázala jsem na nesmyslnost tohoto tvrzení, načež jsem zkusila úlohu konkretizovat – když by Tomáš vážil 50 kg, kolik by vážila Zuzka? Na to Ž6 bez váhání správně odpověděl a na základě této zkušenosti úlohu vyřešil.

Ž7 si udělal zápis a z toho odvodil řešení $t = z - 1$. Chybu našel až po položení otázky, kolik by vážil Tomáš, když by Zuzka vážila 45 kg.

Ž8 se také nejprve domnívala, že váhu Tomáše lze vyjádřit rovností $t = z - 1$. Použila jsem stejný postup jako u žáka Ž7 – položila jsem otázku, kolik by vážil Tomáš, když by Zuzka vážila 45 kg. Ž8 odpověděla správně, ale musela jsem se ještě zeptat, jestli to odpovídá napsanému výrazu, až pak odhalila chybu.

Shrnutí úlohy 4

Častou chybou bylo nerozpoznání klasického antisignálu v úloze, kde někteří žáci informaci „Zuzana váží o 1 kg méně než Tomáš“ zapsali rovností $t = z - 1$. Většina z nich ale byla schopná chybu odhalit po dosazení konkrétních hodnot.

Tři žáci (Ž4, Ž5, Ž6) dokonce vyjádřili váhu Tomáše nelogicky jako jeho váhu zvětšenou o nějaký výraz. V případě Ž4 se jednalo o zvětšení o $z + 1$, u Ž5 zvětšení o rozdíl hmotností Tomáše a Zuzany $(t - z)$, což ale podle zadání bylo 1, a u Ž6 o zvětšení o jedna. Není mi jasné, proč k tomu došlo. U Ž5 se domnívám, že v úloze hledal zbytečné složitosti a že si kvůli zbytečně složitému zápisu vlastně neuvědomil, co zapsal. U Ž4 a Ž6 mi jejich úsudek jasný není.

Úloha 5

Ž4 chvilku trvalo, než se v úloze zorientovala. Trochu se zamotala u výpočtu ceny jedné krabičky lentilek, ale pomohlo jí, když jsem jí poradila, aby si vytvořila zápis. Potom úlohu vyřešila bez chyby.

[223] Přepis pátého rozhovoru, odst. 250.

Ž6 na začátku nebylo jasné, k čemu potřebuje vědět počet krabiček Lentilek a čokolád Margot. Přestože jsme probrali, jakým způsobem v obchodě na pokladně určují cenu nákupu, nezdálo se, že by Ž6 prohlédl. Cenu Lentilek i čokolád vyjádřil správně, ale znovu jsme se zadrhli nad počtem nakupovaných kusů. Až po chvíli se ukázalo, že Ž6 špatně pochopil zadání a myslel si, že má vypočítat hodnoty všech neznámých, které úloha obsahuje, přičemž mu bylo divné, že má k dispozici pouze jeden údaj, a sice že Lentilky stojí o pět korun méně než čokoláda. Po vyjasnění došel ihned ke správnému řešení. Tuto úlohu potom ještě označil za velmi netypickou, protože prý jsou ve škole zvyklí řešit pouze slovní úlohy s čísly.

Ž8 si začala dělat zápis, ale měla potíže vyjádřit cenu Lentilek. Musela jsem jí napomoci otázkou, kolik by stály Lentilky, když by Margot stála 10 Kč. Ž8 chvilku trvalo, než to dala dohromady, ale potom napsala $M - 5 = L$ (použila své označení proměnných). Ze zápisu sestavila bez potíží řešení. Jenom jí ještě chvilku trvalo pochopit, že má v řešení uvedeno písmeno *M*, které se nevyskytuje v zadání. Patrně se zde projevil zvyk při řešení slovních úloh, kde si žáci sami mohou zvolit označení proměnné/neznámé.

Ž9 se zamotala při tvorbě zápisu. Nejprve chybně vyjadřovala cenu čokolády Margot výrazem $5 + p$, přičemž se ptala, jestli se dá říct, že když *p* je počet krabiček, tak *p* je ta jedna krabička. Po mém vysvětlení významu písmene *p* zapsala cenu čokolády Margot ve tvaru $x + 5$. Při zdůvodňování si uvědomila, že to je nesmysl a označila cenu čokolády Margot písmenem x. Chvilku se ještě trápila vyjadřováním ceny Lentilek, ale po mé otázce, kde v textu úlohy se tato informace vyskytuje, a po přečtení této pasáže ihned úlohu vyřešila.

Ž11 nejprve uvedl jako řešení $p + mx + 5$, ale sám to ihned zavrhl a začal si psát zápis. Tím se v úloze zorientoval.

Shrnutí úlohy 5

Tato úloha byla pro většinu žáků zmatečná, protože obsahovala mnoho textu a proměnných a bylo těžké se v ní zorientovat. Jeden žák (Ž6) se dokonce domníval, že má vypočítat konkrétní hodnoty neznámých, a protože to samozřejmě nešlo, nevěděl, jak se do úlohy pustit.

Většina žáků se v úloze zorientovala až po sestavení alespoň části zápisu úlohy. Kritickým místem bylo vyjádření ceny krabičky Lentilek, kde někteří žáci opět nerozpoznali antisignál nebo špatně pochopili, co která písmena vyjadřují. Někteří se také snažili vyjádřit místo ceny Lentilek cenu čokolády Margot, která ale byla součástí zadání úlohy. Opět to ukazuje na nezbytnost udělat si u takovýchto úloh zápis a důsledně číst zadání.

Úloha 6

Někteří žáci před řešením 6. úlohy uvedli, že jim zlomky nejdou nebo že s nimi měli v minulosti problémy.

Ž4 špatně vyhodnotila pouze možnost d), kde se domnívala, že $\boldsymbol{x}$ zmenšené třikrát lze zapsat jako $\boldsymbol{x-3}$. Když jsem se nad tím pozastavila, Ž4 ještě řekla, že to může být i $\boldsymbol{x:3}$. Chtěla jsem, aby mi utvořila slovní spojení k výrazu $\boldsymbol{x-3}$, aby si uvědomila rozdíl. Nejprve odpověděla: „Že je číslo $\boldsymbol{x}$ zmenšený třemi?“[224] Tato odpověď se mi nelíbila, proto jsem se jí zeptala, co vlastně provádí za operaci, když by tam bylo $\boldsymbol{x+3}$. Odpověděla, že sčítá nebo odčítá. Potom jsem chtěla, aby k popisu tohoto výrazu použila slovo zvětšit/zmenšit. V tu chvíli se chytila a správně uvedla, že v případě výrazu $\boldsymbol{x+3}$ zvětšuje číslo $\boldsymbol{x}$ o tři. Potom analogicky doplnila i popis výrazu $\boldsymbol{x-3}$ tak, že zmenšuje číslo $\boldsymbol{x}$ o tři. Z toho udělala závěr, že možnost d) vyjadřuje výraz $\boldsymbol{x:3}$.

Ž5 neměl s řešením úlohy problém. Pouze na poprvé přehlédl možnost a), protože ji uvedl jako správnou možnost až při zdůvodňování své volby. Další chyby jsem si všimla až při vyhodnocování rozhovoru, a sice u možnosti e). Nejsem si ale jistá, jestli nešlo jen o přeřeknutí. Ž5 totiž uvedl, že $\boldsymbol{x}$ zmenšené o jednu třetinu je to samé jako $\boldsymbol{x-\frac{1}{3}}$ a to se rovná $3\boldsymbol{x}$. Protože jsem si toho nevšimla v průběhu rozhovoru, nemohla jsem se na to zeptat. Odčítání zlomků od neznámé bylo ale v této úloze problematické, proto to zde zmiňuji.

S touto úlohou Ž6 příliš problémy neměl, pouze u možnosti b) byl překvapený, že $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ z čísla $\boldsymbol{x}$ je to samé jako $\boldsymbol{\frac{1}{3}\cdot x}$. Nechala jsem Ž6 ověřit toto tvrzení na konkrétním příkladě s číslem $\boldsymbol{x=2}$.

Ž7 se při pohledu na úlohu se zlomky zasmál a uvedl, že zlomky neumí. K jednotlivým možnostem si však pečlivě rozepsal, co znamenají, a s řešením žádný problém neměl.

Ž8 souhlasila s možností b) jedna třetina z čísla $\boldsymbol{x}$, ale při zdůvodňování uvedla, že může násobit nebo dělit a napsala toto: $\boldsymbol{\frac{\frac{1}{3}}{x}=\frac{1}{3}\cdot x}$. Potom se ale zarazila a řekla, že to asi není správně. Zeptala jsem se, jak by vypočítala třeba jednu třetinu z čísla šest, na což odpověděla dobře. S konkrétními čísly problém neměla, s písmenky už ano. Další potíže se vyskytly u možnosti d), kde číslo $\boldsymbol{x}$ zmenšené třikrát vyjádřila výrazem $\boldsymbol{-3x}$. Potom se ale opravila, že to minus by mělo být asi jinde (neuvedla, kde). Když jsem se zeptala, kolik by dostala, když by měla dvanáctku zmenšit třikrát, odpověděla správně a svou chybu opravila.

Ž9 zlomky vůbec neuměla, bylo znát, že je zatížená značným formalismem a pravidla pro počítání už dávno zapomněla. O možnosti a) prohlásila, že neodpovídá, protože tam žádné krát není. Chtěla jsem, aby symboly zapsala, co je v té možnosti uvedeno, a následně aby výraz upravila (roznásobila), ale

[224] Přepis čtvrtého rozhovoru, odst. 350.

mátlo ji písmeno x. Zkusila jsem tedy místo x dosadit číslo čtyři, ale Ž9 řekla, že už to zapomněla. Také se ptala, jestli se při násobení zlomků něco neprohazuje. U možnosti b) se Ž9 domnívala, že třetina z čísla x se určí vydělením čísla x jednou třetinou. Zkoušela jsem kreslit obrázek koláče a pak bonbony a ukázat Ž9 princip (dozvěděla jsem se, že koláč lze rozdělit na tři půlky:-)), ale Ž9 se vyjádřila v tom smyslu, že v obrázcích to chápe, ale u x jí to jasné není. Možnost c) vyhodnotila správně, protože si vzpomněla, že při dělení „se to přehazuje", nicméně i zde udělala chybu, když sice prohodila čitatele se jmenovatelem, ale ponechala znaménko pro dělení: $\frac{x}{1} : \frac{1}{3} = \frac{x}{1} : \frac{3}{1}$. U možnosti d) se podobně jako ostatní žáci domnívala, že jde o odčítání. Zeptala jsem se, kolik by vyšlo, když by měla dvanáctku zmenšit třikrát. Ž9 bez odpovědi na mou otázku usoudila, že o odčítání zřejmě nepůjde. Výraz $x - 3$ pak slovy popsala správně. U možnosti e) jsem Ž9 musela zopakovat, jak se odčítají zlomky, protože se chystala odečítat od sebe jmenovatele.

Ž10 zlomky ovládala dobře, pouze u možnosti d) se domnívala, že se jedná o odčítání.

Ž11 se zastavil u možnosti d). Uvedl, že „zmenšené o tři" by znamenalo, že se odečte trojka, ale u „zmenšené třikrát" neví, čím se zmenšuje. Když jsem se zeptala, jak by chápal spojení „zvětšené třikrát", problém prohlédl a úlohu vyřešil.

Úloha 7

Ž4 bez důkladného zvážení všech možností rovnou označila za správnou možnost A). Odůvodnila to tak, že $2x + 3x$ je vlastně to samé jako $5x$ a délka vyznačené úsečky je také $5x$. Znovu jsem se zeptala, jak by vyjádřila délku vyznačené úsečky, když jeden úsek je délky x a druhý délky 5. Zopakovala, že $5x$. Chybu prohlédla až ve chvíli, když jsem se zeptala, jak by byla dlouhá úsečka, kde jeden úsek je délky 7 a druhý délky 3. Potom správně vyhodnotila možnosti A) i B). Další chybu udělala Ž4 u možnosti D), kde si zřejmě nepřečetla popisek a místo obsahu obdélníka pracovala pouze s délkou dvou stran. Po upozornění na popisek vyřešila úlohu správně.

Ž5 vyřešil úlohu správně i svou volbu možnosti C) logicky vysvětlil, o to víc mě však překvapila jeho reakce, když jsem se namátkou zeptala, proč zavrhl možnost B). Vysvětlil svou volbu tím, že délka celé uvedené úsečky v B) je $2x$ (vizuálně to vypadá, že délka $2 + 3$ je stejná jako délka x, dohromady by to tedy bylo $2x$), úsečka délky $3x$ by byla tedy ještě větší. Zeptala jsem se, jak by vyjádřil délku celé úsečky na obrázku, když by nebyla délka $2 + 3$ stejná jako délka x. Ž5 odpověděl, že by to bylo $5x$. Upozornila jsem ho, že by v tom případě tato možnost B) také odpovídala zadání. Ž5 tím byl zmaten. Když jsem se zeptala, jak by vypočítal délku úsečky, když by znal velikosti dílčích úseků, odpověděl, že by úseky sečetl. Přesto v konkrétním případě u možnosti B) na opakovanou otázku znovu uvedl, že délka celé úsečky je $5x$. Prohlédl až po chvilce. Pro kontrolu jsem se ještě zeptala na možnost D). Zřejmě jsem Ž5 zmátla předchozími otázkami, nebo nevím, ale připadalo mi, že i zde tápal. Například se zeptal, jak je dlouhá úsečka dělící celý obdélník na dvě části, nebo byl překvapený, že má u obrázku vyjadřovat obsah. Když jsem mu ale zopakovala zadání, odpověděl správně. Domnívám se, že tuto úlohu řešil spíše vizuálním odhadem a můj algebraický přístup ho mátl.

Ž6 uvedl jako správnou možnost D). Zdůvodnění v průběhu rozhovoru jsem nepochopila a z nahrávky není Ž6 rozumět, proto jsem nedokázala odhalit, kde došlo k chybě. Ale při procházení záznamu mě zaujalo, že nepovažoval velikosti úseků délky x za stejně dlouhé (písmeno x pro něj zřejmě znamenalo jen jakýsi symbol neurčitosti). Na mé otázky u ostatních možností odpovídal Ž6 správně a nezdálo se, že by měl s úlohou nějaké potíže, proto si myslím, že na začátku došlo zřejmě opět k neporozumění zadání (podobně jako tomu bylo u tohoto žáka i v jiných úlohách).

Trvalo dlouho, než Ž7 úlohu pochopil. Až když jsem jej konkrétními otázkami provedla možností A), byl schopný samostatně řešit ostatní. Zpočátku měl Ž7 problém určit, jak je dlouhá úsečka v možnosti A) – uvedl délku $6x$, ale nedokázal to zdůvodnit. Opravil se, když jsem mu uvedla příklad, jak by určil délku zdi, když by věděl, že nábytek zabral délku 5 m a ještě zbyl neznámý kousek délky x. Chyboval i v možnosti B), kde nejprve sice správně určil délku úsečky výrazem $x + 2 + 3$, ale na otázku, kolik je to dohromady, uvedl $5x$. Možnosti C) a D) potom vyhodnotil i zdůvodnil správně.

Ž8 správně sečetla výraz v zadání $2x + 3x = 5x$, ale pak přiznala, že úplně nerozumí, co se po ní chce, proto jsem ji první možností provedla za pomoci otázek – jak určíš délku této úsečky? Je to to samé, jako výraz v zadání? Dál řešila Ž8 úlohu sama. Chybu udělala v možnosti D), kde vyjádřila obsah obdélníku takto: $5 \cdot x + 5 \cdot x = 25x^2$. Nebyla si však výpočtem jistá a uvedla, že to vynásobila dvakrát. Zkusila se opravit a napsala $5 \cdot x^2$, což odůvodnila tím, že jsou v obrázku dvě x. Ke správnému řešení jsme došly až poté, co jsem se zeptala, jak jsou dlouhé jednotlivé strany obdélníku.

Ž9 úlohu vyřešila dobře, pouze u možnosti A) váhala, protože jí opět asi nebylo úplně jasné zadání, a u možnosti D) omylem vyjadřovala obvod místo obsahu obdélníku.

Ž10 nejprve vybrala jako správnou možnost C). Posléze se ale zarazila, že to tak nebude, protože obsah daného obdélníku by byl ve tvaru $2x^2 + 3x^2$. Jako vysvětlení uvedla, že se jedná o plochu, proto tam musí být na druhou. Zeptala jsem se, jak se počítá obsah obdélníku, což věděla a snadno vypočítala. Při tom si svou chybu uvědomila a uvedla, že aby dostala mocninu x, musela by být pomocí x vyjádřena délka obou stran uvedeného obdélníku. Ještě jsem se zeptala, proč zavrhla možnost B). Zdůvodnila to geometricky – nakreslila vedle sebe pětkrát úsek délky x a porovnala to s úsečkou délky $2 + 3 + x$, která byla kratší. Jako další možnost, jak by se to dalo porovnat, uvedla úsečku rozdělenou na dvě části o délkách 2x a 3x, nicméně si nebyla jistá, jestli by to bylo přesné, když je tam neznámá x.

Ž11 již byl asi unavený nebo nepochopil, co se od něj v úloze chce, protože se u možnosti A) zeptal, kde se vzala v obrázku ta pětka. Když jsem se později zeptala, jak by z obrázku určil délku úsečky, řekl, že by odečetl x minus pět. Potom se opravil, že možná spíš pět minus x, protože se mu zdá úsek délky pět větší. Snažila jsem se jej dotlačit k řešení různými otázkami (např. jak by určil délku úsečky rozdělené na dva úseky o délkách 3 a 6, jak by určil délku úsečky na obrázku, jestli se to shoduje s výrazem v zadání), na které odpovídal správně, ale zřejmě si při tom prohlížel další možnosti nebo už byl unavený, protože byl jako duchem nepřítomný. U možnosti C) se zmateně zarazil, jak se počítá obsah obdélníku, jestli se tam nemá vyskytovat dvojka.

Shrnutí úlohy 7

Tato úloha byla pro žáky velmi nezvyklá a často přeskakovali text u jednotlivých možností (po pročtení zadání se dívali rovnou na obrázky). Některým žákům jsem musela zadání vysvětlit a při tom jsem je bohužel nasměrovala k algebraickému přístupu k řešení. Žáci, kterým jsem svůj přístup nevnutila, měli totiž sklon porovnávat velikosti úseček vizuálním odhadem, nezabývali se vůbec tím, že délky jednotlivých částí jsou jasně dané (typická ukázka Ž5). Obecně žáci u prvních dvou možností využívali spíše geometrické porovnávání délek úseček než algebraický přístup. U mnohých žáků se počínaje touto úlohou začala projevovat únava – třeba i tím, že občas nebyli schopni využít nějakou znalost, přestože před tím podobný poznatek bez problémů využívali (např. vypočítat obsah obdélníku).

Úloha 8

Ž5 udělal v průběhu řešení chyby u možností a) a e), které ale sám při zdůvodňování bez mého zásahu opravil (zřejmě napoprvé jen nepozorně četl zadání). Větší obtíže měl pouze u možnosti b). Zřejmě přesně nechápal zadání (vyjádřil se, že mu přijde divné spojení „okurky a jedna se nevejde“). Domníval se, že výraz má vyjadřovat počet okurek ve sklenici. Nakreslila jsem mu tedy obrázek situace pomocí tří rámečků (sklenic) a sedmi čárek (okurek). Nicméně na otázku, jak by podle obrázku určil, kolik je okurek celkem, jej napadlo pouze řešení okurky sečíst. Nedokázala jsem v tu chvíli vymyslet vhodné další otázky, proto jsem mu řešení prozradila.

Ž6 se pozastavil nad možností b), protože nechápal, proč by se měl násobit počet sklenic a počet okurek (ono $\boldsymbol{c \cdot d}$ ze zadání). Poradila jsem mu, aby si situaci nakreslil pomocí tří sklenic po dvou okurkách. Na základě obrázku jsem potom po Ž6 chtěla, aby mi řekl, jak by vypočítal, kolik je na obrázku okurek. Zřejmě mu to připadalo zjevné, protože neodpovídal. Situaci prohlédl až ve chvíli, když jsem se zeptala, jak by to bylo v případě 150 sklenic po 16 okurkách. Ž6 ještě udělal chybu u možnosti d), kde špatně vyjádřil obsah obdélníku o stranách $\boldsymbol{c}$ a $(d+1)$ takto: $\boldsymbol{S = c \cdot d} + 1$.

Ž7 by zřejmě neměl s touto úlohou větší problémy, nicméně se dvakrát zeptal na dost základní informace, což mě trochu překvapilo, ale přičítám to zvyšující se únavě a následné neochotě pátrat v paměti. U možnosti a) chtěl Ž7 vědět, co znamená slovo součin (prý si plete pojmy pro násobení a dělení). Později u možnosti d) se zarazil nad vzorcem pro výpočet obsahu obdélníku, přestože jej v předchozí úloze naprosto automaticky používal. Také při tomto výpočtu udělal chybu – vynechal závorku.

Ž8 špatně vyhodnotila možnost b), kde se nachytala na antisignál – uvedla, že se jednička přičítá, tak by měla v zadání být spíš jedna okurka navíc (a ne, že se jedna okurka nevešla). Po nakreslení obrázku prohlédla, že tam opravdu jedna okurka navíc je. Při výpočtu obsahu obdélníku u možnosti d) začala Ž8 počítat obvod, po upozornění byla chvilku zmatená, ale potom vše v pořádku dopočítala.

U možnosti b) Ž9 přesně nerozuměla, co se tím myslí, proto jsem jí situaci musela svými slovy přeříkat. Potom jí řešení nedělalo potíže. Za to u možnosti d) špatně určila výraz pro obsah obdélníku – není mi jasné, jestli chybu udělala proto, že si výpočet nenapsala a z hlavy pak špatně roznásobila závorku $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{d} + \mathbf{1})$, nebo jestli ji opravdu nenapadlo, jak je tam ta závorka podstatná (zvlášť když v zadání je závorka uvedena).

Ž10 se zastavila u možnosti b), ale pomohlo jí mé doporučení nakreslit si pro vhled do situace obrázek s konkrétními hodnotami proměnných $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$. U možnosti c) přehlédla, že se jedná o součet nikoliv o součin (domnívám se, že to bylo z nepozornosti).

Ž11 chybně vyhodnotil pouze možnost b), protože se domníval, že počet okurek celkem se dá vyjádřit pouze součtem $\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d} + \cdots + \mathbf{1}$. Pomohlo nakreslení obrázku.

Shrnutí úlohy 8

V této úloze byly problematické možnosti b) a d). U d) šlo pouze o to si uvědomit, jak se počítá obsah obdélníku, a nezapomenout na závorku. Možnost b) byla náročná z více hledisek. Jednak obsahovala větší množství textu než ostatní možnosti, proto vyžadovala pečlivější přečtení, navíc obsahovala klasický antisignál „jedna okurka se do sklenic nevešla“, který ale překvapivě zmátl jenom jednu žákyni (Ž8). Myslím, že ostatním nečinil problém díky tomu, že po prvním přečtení úloze neporozuměli a po mé nápovědě řešili úlohu obrázkem. Někteří žáci měli problém si představit, že by se dal celkový počet okurek spočítat jinak než prostým součtem, na což pomohl konkrétní příklad s velkými čísly (např. Kolik je okurek celkem, když máme 150 sklenic po 16 okurkách).

Úloha 9

Ž4 nahlas pročetla a zkontrolovala, zda u možnosti a) odpovídají číselné údaje, a určila, co vyjadřují proměnné $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Aniž by věnovala pozornost znaménku, označila možnost a) za správnou. Když jsem se zeptala, co v tomto případě vyjadřuje znaménko mínus, zasmála se a odpověděla: „No, tak to tam asi mám blbě. Protože tady asi by muselo bejt plus, když dohromady snědli 18 jakoby koláčů. A ne mínus.“[225]

U možnosti b) Ž4 opět zkontrolovala číselné údaje a potom se zaměřila na znaménko, které v tomto případě odpovídalo. Z toho usoudila, že je tato možnost správně. Zeptala jsem se ještě na význam proměnných. Správně uvedla, co vyjadřuje proměnná $\boldsymbol{x}$, ale u proměnné $\boldsymbol{y}$ nastal problém. Nejprve

[225] Přepis čtvrtého rozhovoru, odst. 439.

uvedla, že y vyjadřuje tu polovinu, kolik vajec Petr rozbije. Sama se ale posléze opravila, že tu polovinu vyjadřuje koeficient 3. Prošla znovu všechny symboly, které rovnice obsahovala, ale odpověď nevěděla. (Nahlas ještě zazněly tyto možné významy proměnné y: počet vajíček; počet rozbitých vajíček.) Nenapadlo mě, jak jí navést k cíli, proto jsem jí prozradila, že se opět jedná o počet balení. V tu chvíli žákyni svitlo a doplnila, že by obě proměnné musely být stejné, aby tato možnost byla řešením úlohy.

S možností c) Ž4 problémy neměla.

Ž5 vyhodnotil možnost a) správně.

U možnosti b) také odpověděl správně, ale nenechala jsem Ž5 zdůvodnit jeho volbu a rovnou jsem se zeptala, co v tomto případě vyjadřují proměnné x a y. U proměnné x Ž5 nejprve uvedl, že vyjadřuje balení po šesti vejcích, po mé otázce se však opravil, že tím míní počet balení. S proměnnou y si nevěděl moc rady, uváděl postupně tyto významy: počet rozbitých vajec, rozbitá vejce, vejce. Napadlo mě, že bych opět mohla situaci vyjádřit pomocí obrázku, což jsem udělala:

Ž5 na základě toho uvedl, že x vyjadřuje počet plat a že y by tedy mělo také vyjadřovat počet plat. Na mou otázku, jestli tedy můžeme možnost b) zapsat rovnicí uvedenou v zadání, Ž5 odpověděl, že si myslí, že ne, ale neuměl to zdůvodnit. Řešení prohlédl až ve chvíli, když jsem zopakovala, že proměnné x a y vlastně vyjadřují to samé.

Nad možností c) se Ž5 nejistě zastavil s otázkou, jestli je možné, že by ani jedna možnost nevyhovovala zadání. Při zdůvodňování však zjistil, že si špatně přečetl zadání a svou volbu opravil.

U možnosti a) udělal Ž6 chybu jen ve znaménku – když jsem se na jeho význam v rovnici zeptala, svou chybu opravil a uvedl příklad, kdy by se mínus v rovnici mohlo vyskytovat: $18 - 6x = 3y$.

Varianta b) dělala Ž6 podstatně větší problémy. Nejdříve se pokoušel vysvětlit významy jednotlivých částí rovnice (např. uvedl, že x a y vyjadřují balení, následně změnil svůj názor, že to jsou vejce; 6 a 3 chápal jako počet balení), ale pak přiznal, že neví, jestli se v úloze počítá se dvěma baleními, které popisují ty dva přítomné výrazy $6x$ a $3y$, nebo jestli je tam více balení, což by zas popisovaly proměnné x a y. Shrnula jsem mu informace ze zadání, že se tam o počtu balení nepíše, ale že je tam uvedeno, že v každém balení je šest vajec. Ž6 potom usoudil, že tedy 6 bude označovat plné balení (opravila jsem ho, že označuje počet vajec v jednom balení), 3 že vyjadřuje polovinu těch vajec (doplnila jsem, že se jedná o počet rozbitých vajec opět v tom jednom balení) a x a y že by mohlo znamenat každé to jedno balení. Namítla jsem, že kdyby x a y byly 1, tak by úloha neměla smysl ($6 - 3 = 3$), že x a y jsou neznámé a vyjadřují neznámý počet balení a že tedy výraz 6x vyjadřuje počet všech vajec, které Petr měl, a 3y vyjadřuje počet těch vajec, které rozbil. Ž6 se pak ještě znovu pokusil o interpretaci písmene y – počet, co zbyl z těch vajec. Pak ale nedokázal říci, co znamená v rovnici ta 3. Nakreslila jsem mu tedy situaci do schématu pomocí obdélníčků (balení vajec) rozdělených na šest částí jako čokoládu (každá část symbolizovala jedno vejce). Při tom jsem znovu opakovala fakta ze zadání. Poté, co Ž6 označil opět proměnné x a y špatně jako počet vajec, které Petr upustil, jsem Ž6 řešení prozradila a vysvětlila.

S možností c) Ž6 obtíže neměl.

Ž7 vyhodnotil možnost a) špatně, podobně jako ostatní přehlédl znaménko. Chybu zjistil, když jsem mu zakryla zadání a požádala ho, aby podle informací z možnosti a) sestavil rovnici. Při interpretaci významu písmen z rovnice uvedl, že x jsou děti a y dospělí. Přestože jsem jej opravila, o chvilku později dokonce uvedl, že x jsou děti, které snědly x koláčů.

Možnost b) vyhodnotil správně, ale opět měl problémy s popisem významu jednotlivých proměnných. Písmeno x považoval za jedno balení, $6x$ tedy za balení po šesti vejcích, $3y$ prý označovalo polovinu rozbitého balení.

Význam písmen mu dělal potíže i v poslední možnosti c). Přesto si myslím, že do určité míry to bylo způsobeno spíše únavou a problémem udržet pozornost než problémem s matematikou samotnou. Zde jsou příklady jeho výroků: x jsou děvčata, x je jedno vajíčko, x je počet všech vajíček dohromady, x je počet jednoho vajíčka, x je počet nazdobených vajíček.

Ž8 v možnosti a) sice ihned odhalila znaménko, ale při interpretaci významu písmen se domnívala, že x označuje jedno dítě. Zeptala jsem se, jestli to tedy znamená, že když bych měla tři děti a čtyři dospělé, že bych už nemohla počítat množství koláčů podle této rovnice. Ž8 odpověděla, že ne, že bych ji využít mohla, ale nedokázala vysvětlit, proč. Řekla jsem jí tedy, že x je nějaká proměnná a že vyjadřuje počet dětí. Ž8 tuto informaci vstřebala a dále ji využívala při popisu významu písmen.

Ž8 špatně vyhodnotila možnost b), kde měla potíže odhalit význam písmene y. Nejprve uvedla, že y je počet vajec, které zbyly, a 3 je ta polovina. Když jsem jí nakreslila obrázek dané situace, řekla, že y je polovina těch balení, a potom se opravila, že je to počet těch balení. Samotné řešení se pak dozvěděla ode mne.

Ž9 si v možnosti a) také nevšimla znaménka. K odhalení této chyby došlo poté, co jsem zakryla zadání a chtěla, aby Ž9 možnost a) vyjádřila rovnicí a tuto rovnici pak následně srovnala se zadáním. Při popisu významu proměnných uvedla, že x označuje dítě. Na mou otázku, jestli tím myslí jedno dítě, se se smíchem opravila (a dál se snažila být při vyjadřování přesnější).

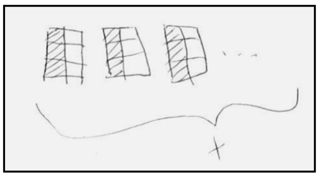
Potíže měla Ž9 s možností b), kde jí zarazila přítomnost čísla tři v rovnici, protože v popisu možnosti se trojka nevyskytovala. Ptala jsem se tedy na význam proměnných. O výrazu $6x$ řekla, že vyjadřuje počet balení po šesti vejcích. U y nejdříve navrhla, že by mohlo jít o jednotlivá vejce, potom se snažila interpretovat celý součin $3y$ jako počet balení krát něco (nevěděla, co s tou trojkou), později $3y$ označila jako počet balení rozbitých. Pomohlo nakreslení obrázku a otázka, kolik Petr rozbil vajec, když jich na začátku měl $6x$. Ž9 pak již dokázala správnou odpověď vymyslet a i vysvětlit.

Ž10 s touto úlohou snad jako jediná neměla problémy, pouze podobně jako ostatní žáci zpočátku používala nepřesné významy písmen (např. x jsou děti, y jsou dospělí), přestože z kontextu vyplynulo, že opravdový význam chápe (že se jedná o počet dětí a počet dospělých).

Ž11 nejprve nechápal zadání a zřejmě se domníval, že má vypočítat konkrétní hodnoty x, y, které jsou řešením dané rovnice. Po vyjasnění zadání dospěl u možností a) a c) ke správnému závěru. V možnosti b) se ale zamotal při určování významu proměnné y. Správně dokázal určit význam členů $6x$ a $3y$, ale u y uváděl, že vyjadřuje počet, ale nevěděl čeho. I v tomto případě pomohl obrázek.

Shrnutí úlohy 9

Tato úloha byla velmi zajímavá, nicméně kladla velké nároky na pozornost žáků a ta již po více než hodině přemýšlení často ochabovala. Přesto mi připadalo zajímavé, že se u žáků opakovaly podobné obtíže. V možnosti a) většina žáků nevěnovala takřka vůbec pozornost znaménku, což žáci odhalili většinou až po mém přímém dotazu nebo poté, co sami sestavili rovnici odpovídající popisu možnosti a). V možnosti b) nebyli žáci schopni pojmenovat, co vyjadřuje písmenko y. Některým žákům pomohlo názorné zakreslení (viz obrázek 73).



Obrázek 73

Žádný žák se sám o nákres nebo o jiné znázornění situace nepokusil.

Další chybou bylo špatné nebo nepřesné používání významu písmen. Nejčastěji se objevovaly výroky typu „x jsou děti“ místo „x vyjadřuje počet dětí“ a „x je jedno balení“ místo „x označuje počet balení“.

3.3 Shrnutí chyb

V tomto oddíle je uveden přehled problémů žáků, které se vyskytly v jednotlivých úlohách.

Úlohy 1a – 1d

	Úloha 1a	Úloha 1b	Úloha 1c	Úloha 1d
Ž1	nedostatečné čtení zadání		porovnávání jen v rámci kritéria Vzhled nedořešeno	(práce se znaménky) nezná pojem „koeficient“
Ž2	neschopnost uchopit vzorec	intuitivní vzorec	problém minimální hodnoty	nezná pojem „koeficient“
Ž3			problém minimální hodnoty	(práce se znaménky) nezná pojem „koeficient“
Ž4	nečetla tabulku		problém interpretovat záporný výsledek	nezná pojem „koeficient“
Ž5		intuitivní vzorec	místo odčítání dopočítávání problém určit řešení jinak než výčtem prvků problém minimální hodnoty	práce se znaménky
Ž6	nedostatečné čtení zadání neschopnost uchopit vzorec	intuitivní vzorec	tendence pracovat s přirozenými čísly	práce se znaménky nezná pojem „koeficient“
Ž7	neschopnost uchopit vzorec problém zapsat vzorec		problém minimální hodnoty	práce se znaménky chápání pojmu „desetinné číslo“ jako číslo z intervalu (0,1) nezná pojem „koeficient“
Ž8	neschopnost uchopit vzorec	intuitivní vzorec	porovnávání jen v rámci kritéria Vzhled problém zapsat řešení pomocí znamének nerovnosti	
Ž9	neschopnost uchopit vzorec minus za závorkou	intuitivní vzorec	výrazně upřednostňována strategie pokus-omyl	práce se znaménky nezná pojem „koeficient“ problém s pochopením významu koeficientů
Ž10	neschopnost uchopit vzorec	intuitivní vzorec	problém minimální hodnoty	
Ž11			tendence pracovat s přirozenými čísly	nezná pojem „koeficient“

Úlohy 2 – 5

	Úloha 2	Úloha 3	Úloha 4	Úloha 5
Ž1	písmeno zastupuje nějaký předmět (j označuje 1 bedýnku) j označuje hmotnost jahod v 1 bedýnce			plete si významy písmen antisignál cena krabičky Lentilek: $p+5$, $m+5$, $x+5$
Ž2				
Ž3	j označuje hmotnost jahod v 1 bedýnce		problém při vyjadřování vztahů pomocí zadaných proměnných (když si je sama zvolí – OK) antisignál	problém při vyjadřování vztahů pomocí zadaných proměnných (když si je sama zvolí, tak OK)
Ž4	písmeno zastupuje nějaký předmět (j označuje jednu bedýnku)	váhala mezi $(n+5)\cdot 3$ a $n+5\cdot 3$	zvětšení váhy Tomáše $t=t+z+1$	plete si významy písmen vyjadřuje zadanou cenu čok. Margot
Ž5	j jako jednotka hmotnosti (1 kg)		zvětšení váhy Tomáše $t=(t-z)+t$	antisignál
Ž6	j jako jednotka hmotnosti (1 kg)	$3n+5$	zvětšení váhy Tomáše $t=t+1$	špatné pochopení, co má počítat
Ž7	písmeno zastupuje nějaký předmět (j označuje 1 lahev)		antisignál	
Ž8			antisignál	problém vyjádřit cenu krabičky Lentilek
Ž9				plete si významy písmen vyjadřuje zadanou cenu čok. Margot: $p+5$, $x+5$, $p-5$
Ž10	písmeno zastupuje nějaký předmět (j označuje 1 bedýnku)	váhala mezi $n+5+3n$ a $(n+5)\cdot 3$ problém slovně popsat výraz		
Ž11	j označuje hmotnost jahod v 1 bedýnce			

Úlohy 6 – 9

	Úloha 6	Úloha 7	Úloha 8	Úloha 9
Ž1		špatně čte/nečte text jednotlivých možností	nerozumí možnosti b)	význam písmen (písmena zastupují předměty místo označení počtu)
Ž2		vyjádření délky úsečky	obsah obdélníku – vynechává závorku	problém interpretovat y v možnosti b)
Ž3	odečítání zlomků, kde je pouze v jednom čitateli x			význam písmen (písmena zastupují předměty místo označení počtu)
Ž4	x zmenšené třikrát je to samé jako $x-3$	vyjádření délky úsečky špatně čte/nečte text jednotlivých možností		znaménko v a) problém interpretovat y v možnosti b)
Ž5	x zmenšené o jednu třetinu je to samé jako $3x$	vyjádření délky úsečky	nerozumí možnosti b) okurky počítá prostým součtem	problém interpretovat y v možnosti b)
Ž6	neví, že jedna třetina z čísla x je to samé jako jedna třetina krát x	velikosti úseků délky x nepovažuje za stejně dlouhé	nerozumí možnosti b) okurky počítá prostým součtem obsah obdélníku – vynechává závorku	znaménko v a) potíže s chápáním a interpretací symbolů v rovnici u možnosti b)
Ž7		potíže pochopit zadání vyjádření délky úsečky	nezná pojem součin obsah obdélníku – ptá se na vzoreček, vynechává závorku	znaménko v a) význam písmen (písmena zastupují předměty místo označení počtu) problém interpretovat x, y v možnosti b)
Ž8	jedna třetina z čísla x je to samé jako jedna třetina lomeno x, což se rovná jedna třetina krát x x zmenšené třikrát je to samé jako $-3x$	potíže pochopit zadání obsah obdélníku (představa, že by se mělo vyskytnout x^2)	antisignál obsah obdélníku – plete si s obvodem	význam písmen (písmena zastupují předměty místo označení počtu) problém interpretovat y v možnosti b)

Ž9	totální formalismus $x \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{x}{3}$, protože tam není krát jedna třetina z čísla x je to samé jako $\frac{x}{\frac{1}{3}}$ $\frac{x}{1} : \frac{1}{3}$ je to samé jako $\frac{x}{1} : \frac{3}{1}$ x zmenšené třikrát je to samé jako $x - 3$ při odčítání dvou zlomků odčítá jmenovatele	potíže pochopit zadání špatně čte/nečte text jednotlivých možností	nerozumí možnosti b) obsah obdélníku – vynechává závorku	znaménko v a) význam písmen (písmena zastupují předměty místo označení počtu) problém interpretovat y v možnosti b)
Ž10	x zmenšené třikrát je to samé jako $x - 3$	obsah obdélníku (jedná se o plochu, musí obsahovat x^2)	nerozumí možnosti b)	význam písmen (písmena zastupují předměty místo označení počtu)
Ž11	x zmenšené třikrát si neumí představit (uvědomuje si, že x zmenšené o tři je to samé jako $x - 3$)	potíže pochopit zadání obsah obdélníku (plete si s obvodem)	okurky počítá prostým součtem	nepochopení zadání – chce řešit Diofantovskou rovnici problém interpretovat y v možnosti b)

4 Závěr

Na základě stanovených cílů na začátku mé diplomové práce postupně shrnu jejich naplnění a uvedu nejzajímavější závěry, k nimž jsem dospěla.

Provést analýzu tří řad učebnic z hlediska výuky pojmu proměnná a algebraických výrazů

V oddílu 2.1 jsem detailněji popsala řadu učebnic pro 2. stupeň ZŠ autorů Binterová, Fuchs, Tlustý z nakladatelství Fraus, řadu učebnic autorů Odvárko, Kadleček z nakladatelství Prometheus a učebnic autorů Rosecká a kol. z nakladatelství Nová škola.

V řadě učebnic z nakladatelství Fraus a z nakladatelství Nová škola se žáci častěji setkávají s proměnnými než v řadě z nakladatelství Prometheus, kde autoři naopak více používají písmena ve formě neznámých. Toto srovnání je ale relativní, protože například učebnice z dílny autorů Odvárko, Kadleček oproti učebnicím z nakladatelství Fraus obsahují nepoměrně větší množství úloh a textů, takže absolutní četnost výskytů proměnné by byla v těchto řadách učebnic zřejmě srovnatelná, přestože na první pohled se to tak nejeví. Řada učebnic z nakladatelství Nová škola je na tom v tomto směru nejlépe. Nevýhodou této řady učebnic je ale používání písmen jako zkratek, které se podle (McNeil, 2010) nejeví vhodné.

Analýza dále ukázala, že zvláště v učebnicích pro 6. a 7. ročník jsou v řadě učebnic z nakladatelství Fraus a Nová škola proměnné a neznámé zastupovány různými písmeny (např. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$), zatímco v učebnicích autorů Odvárko, Kadleček je nejčastěji používáno $\boldsymbol{x}$ pro označení neznámé a proměnné jsou většinou značeny písmeny $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. To by podle mého názoru mohlo vést k problémům s interpretací těchto pojmů, pokud se vyskytují v jiných souvislostech a s jiným značením.

Podstatným rozdílem mezi všemi řadami učebnic je množství a výběr úloh. Zatímco v učebnicích z nakladatelství Fraus jde kvalita obsahu na úkor kvantity (úloh je podstatně méně než v řadě učebnic z nakladatelství Prometheus a Nová škola, autoři ale pečlivě vybrali skladbu textů s ohledem na pestrost a rozmanitost), učebnice z nakladatelství Prometheus působí opačným dojmem. Obsahují více úloh, které na první pohled vypadají jednotvárně a velmi podobně (obzvláště sady úloh umístěné pod výkladem nového učiva jsou stejného typu), ale po bližším zkoumání lze říci, že tyto učebnice obsahují obdobné typy úloh jako učebnice nakladatelství Fraus. Pouze by bylo zajímavé zjistit, zda žáci, kteří ve výuce používají učebnice z nakladatelství Prometheus, v praxi všechny uvedené typy úloh řeší. Většinou jsou totiž zajímavější a podnětnější úlohy řazeny ke konci kapitol a často jsou také označeny štítky, které mohou navozovat dojem, že se jedná o úlohy určené pouze „chytrým“ žákům. Řada učebnic z nakladatelství Nová škola se od zbývajících řad učebnic odlišuje zejména četným zařazováním úloh s geometrickým kontextem.

Seznámit se se závěry zahraničních výzkumů týkajících se dané problematiky

V rámci práce jsem prostudovala tři zahraniční články pojednávající o přechodu mezi aritmetikou a algebrou. První srovnává výsledky tradiční a standardní výuky v USA a doporučuje používat standardní výuku, která používá konstruktivistický přístup.

Další článek popisuje vliv použitých znaků na chápání žáků. Autoři docházejí k závěru, že nejvhodnější jsou znaky, které nejsou podobné zkratkám předmětů, např. obecné znaky x, y nebo pro žáky neznámé znaky řecké abecedy. Žáci mají totiž sklon si pod zkratkami představovat konkrétní předměty místo proměnných a neznámých.

Poslední článek hledá příčiny neporozumění algebraickému zápisu. Autoři zjistili, že většina žáků do 15 let není schopná chápat písmena jako zobecněná čísla nebo jako konkrétní neznámé, ale místo toho žáci nahrazují písmena číselnými hodnotami, nebo je považují za zkratky. Jako jednu z příčin nesprávného pochopení uvádí autoři účinky nevhodných učebních materiálů.

Analyzovat úspěšnost žáků v úlohách z algebry v mezinárodním srovnávacím výzkumu TIMSS

Mezinárodní testování TIMSS odhalilo zhoršení výsledků českých žáků v matematice, především v oblasti Algebra. Testování však neuvádí důvody tohoto zhoršení. Na výsledcích jednotlivých úloh z TIMSS 2007 je vidět, že žáci zvládají lépe úlohy, kde stačí uplatnit naučené postupy. Žákům však činí problémy úlohy na zobecňování a také mají pravděpodobně potíže s pozorností (často chybují např. v situacích, kde se vyskytují dvě znaménka mínus vedle sebe nebo je mínus před závorkou).

Uskutečnit vlastní výzkum metodou rozhovorů se žáky nad řešením úloh podobného typu jako v TIMSS z oblasti Algebra

Vlastní výzkum jsem uskutečnila ve dvou fázích. Rozhovory jsem poté podrobila kvalitativní analýze a identifikovala nejzávažnější žákovské obtíže.

Identifikovat potíže, které žáci s řešením úloh tohoto typu mají

V první úloze se ukázalo, že žáci mají potíže zorientovat se v delším zadání úloh. Někteří žáci nedostatečně přečetli text zadání (např. přeskočili informace v tabulce, nevnímali údaje o významu bodového hodnocení – zřejmě je považovali za zřejmé z obecně platných zvyklostí), nebo se příliš dlouho zabývali čtením zadání, aniž by jej konfrontovali s položenou otázkou úlohy. U 6 žáků se také projevila neschopnost uchopit zadaný výraz. Pokud byla žákům dána stejná úloha, ale s jinak formulovanou otázkou, při níž měli vztahy v úloze sami matematizovat, většina žáků úlohu nakonec vyřešila. Zadaný výraz ale žáky mátl, což vede k úvaze, že žáci nemají s interpretací výrazů dostatek zkušeností. U 5 žáků nastal problém v úloze 1c s hledáním dolní hranice intervalu řešení (jednalo se o polootevřený interval řešení, kde dolní hranice do něj nepatřila). Problém podle mého názoru ukazuje na malou zkušenost žáků s reálnými čísly. Žáci měli tendence si vytvořit jakýsi diskrétní model reálných čísel, aby mohli určit řešení úlohy pomocí výčtu prvků, kde dolní hranicí intervalu řešení byla minimální hodnota z množiny dané výčtem.

Zajímavé byly i způsoby, jak žáci chápali význam písmene j v druhé úloze. Čtyři žáci se domnívali, že se jedná o označení předmětu, např. „j označuje 1 bedýnku jahod“ nebo „j označuje 1 lahev“. Tři žáci uvedli, že se jedná o hmotnost jahod v jedné bedýnce. U 2 žáků se v průběhu hledání správné odpovědi vyskytla interpretace, že se jedná o označení jednotky hmotnosti, tedy „j znamená 1 kg“. Při použití nápovědy v podobě výběru ze čtyř možných odpovědí žáci nedokázali rozlišit mezi hmotností jahod v jedné bedýnce a počtem kilogramů jahod v jedné bedýnce.

Třetí úloha žákům potíže nedělala, přestože se našel 1 žák, který ji vyřešil chybně, a 2 žáci váhali, zda bude ve výrazu závorka.

Ve čtvrté úloze 3 žáci nerozpoznali klasický antisignál, kde někteří žáci informaci „Zuzana váží o 1 kg méně než Tomáš“ zapsali rovností $t = z - 1$. Žáci ale byli schopni chybu odhalit po dosazení konkrétních hodnot. U 3 žáků se objevilo vyjádření váhy Tomáše jako jeho váha zvětšená o nějaký výraz. V jednom případě se jednalo o zvětšení o $z + 1$, v druhém o zvětšení o rozdíl hmotností Tomáše a Zuzany $(t - z)$, což ale podle zadání bylo 1, a třetí žák zvětšil váhu Tomáše o jedna. Příčiny tohoto postupu z výzkumu nevyplynuly. Jedna žákyně měla potíže vyjádřit správně vztahy mezi proměnnými pomocí písmen uvedených v zadání. Když však na vyjádření váhy Tomáše a Zuzany použila vlastní způsob pomocí písmene x, uvedla vztah správně.

Pátá úloha byla náročná na orientaci v textu. To byl zřejmě důvod, proč si 3 žáci v průběhu řešení pletli významy proměnných ze zadání. Další obtíže jsem u žáků zaznamenala s vyjádřením ceny krabičky lentilek, kde dva žáci nerozeznali antisignál v úloze a dva žáci místo ceny lentilek začali vyjadřovat cenu čokolády, ačkoliv ta byla v textu zadaná (ovšem pomocí proměnné). I zde se u jedné žákyně ukázalo, že je schopna matematizovat vztahy v úloze v případě, že si zvolí vlastní označení, ale s písmeny ze zadání je pro ni tato činnost problematická.

V šesté úloze na přiřazení slovního popisu k výrazu byla nejproblematičtější možnost d), se kterou mělo potíže 5 žáků. Tři z nich se domnívali, že popis „číslo x zmenšené třikrát“ lze zapsat výrazem $x - 3$. Jedna žákyně vytvořila zápis ve tvaru $-3x$ a zbývající žák si tuto možnost vůbec neuměl představit, pouze opakoval, že $x - 3$ to není, protože to by popsal slovy „číslo x zmenšené o tři“. S možností b) se potýkali 3 žáci. Dvě žákyně se snažily popis „jedna třetina z čísla x“ zapsat ve tvaru $\frac{\frac{1}{3}}{x}$ nebo $\frac{x}{\frac{1}{3}}$. Jeden žák vůbec nevěděl, že jednu třetinu z čísla x může zapsat jako součin.

Sedmá úloha byla pro žáky náročná především z hlediska porozumění zadání, protože se s tímto typem úloh běžně nesetkávají. U čtyř žáků jsem zaznamenala výrazné neporozumění úloze, kdy jsem musela podrobně vysvětlovat, co se po nich chce. Tři žáci během řešení špatně nebo nedostatečně přečetli text jednotlivých možností a pracovali rovnou s obrázky. Někteří žáci úlohu řešili graficky, některým jsem bohužel vnutila algebraický přístup (reakce na žákovské neporozumění úloze), proto nelze přesně říci, jak by žáci většinově k úloze přistupovali. Další problematickou částí bylo vyjádřit správně délku úsečky, která se skládala ze dvou úseků, přičemž délka jednoho úseku byla vyjádřena pomocí proměnné. Čtyři žáci tuto délku určili pomocí součinu délek obou úseků. V případě označení délek obou úseků přirozenými čísly však správně použili součet.

V osmé úloze měli žáci obtíže zejména se třemi oblastmi: neporozumění možnosti b), vynechání závorky při výpočtu obsahu obdélníku, počítání okurek prostým součtem. Pět žáků zmátlo zadání možnosti b), které se od ostatních možností značně lišilo tím, že spíše připomínalo slovní úlohu než slovní popis výrazu. K řešení byli schopni dojít až po vysvětlení zadání experimentátorem. Při výpočtu obsahu obdélníku 4 žáci vynechali závorku, ačkoliv v instrukcích možnosti d) bylo označení délek stran uvedeno se závorkou. Zajímavý jev se vyskytl u 3 žáků, kteří v možnosti b) počítali okurky prostým součtem a nebyli sami schopni nahlédnout, že lze počet okurek vyjádřit i součinem $\boldsymbol{c \cdot d}$, kde $\boldsymbol{c}$ je počet sklenic a $\boldsymbol{d}$ je počet okurek v jedné sklenici. Těmto žákům pomohlo názorné zakreslení příkladu konkrétního malého počtu sklenic a okurek do obrázku. Někdy bylo třeba ještě položit doplňující otázku na případ většího počtu sklenic a okurek (např. 150 sklenic po 16 okurkách).

V deváté úloze se vyskytovaly převážně tři problémy: problém s interpretací $\boldsymbol{y}$ v možnosti b), významy písmen v celé úloze a znaménko v možnosti a). V problému s interpretací písmene $\boldsymbol{y}$ v možnosti b), který se vyskytl u 8 žáků, bylo patrné, že žáci řeší úlohu spíše intuitivně a nedokáží detailně analyzovat problém a např. doplnit podmínku, že by možnost měla smysl pro případ $\boldsymbol{x = y}$. Dále se u 6 žáků objevily obtíže s vyjádřením významu písmen, které žáci interpretovali zejména jako zkratky předmětů, místo aby chápali písmena jako označení nějakého počtu nebo veličiny (viz oddíl 2.3.2).

Shrnout žákovské obtíže a navrhnout didaktická doporučení

Podobně jako v (McNeil, 2010) a (MacGregor, 1997) se během mého výzkumu u druhé a deváté úlohy objevil problém s chápáním významu písmen. Ve druhé úloze při rozhovorech někteří žáci zkoušeli vysvětlit význam písmene j na příkladech (nahrazením písmene číselnými hodnotami) nebo jej považovali za označení předmětu. V deváté úloze pak chápali písmena zejména jako zkratky předmětů místo toho, aby chápali písmena jako označení počtu předmětů.

Dále měli někteří žáci potíže zorientovat se v delším zadání první úlohy. Z tohoto hlediska považuji za vhodné využít nabídku úloh řady učebnic autorů Odvárko, Kadleček, kteří do učebnic zařadili i úlohy náročnější na čtenářskou gramotnost. Domnívám se, že častější použití těchto úloh ve výuce by mohlo mít vliv na úspěšnost žákovských řešení.

Výzkum také ukázal, že žáci mají malé zkušenosti s interpretací výrazů. Z analýzy učebnic vyplynulo, že úlohy na dovednost nalézt kontext k zadanému výrazu se v učebnicích téměř nevyskytují.

V učebnicích jsem také neobjevila úlohy, které by na žáky kladly nároky ohledně různé reprezentace stejných výsledků (řešení výčtem prvků, intervalem, nerovností, grafem apod.). Nejčastěji se žáci v učebnicích setkávají s úlohami, které mají jen jedno či dvě řešení, v případě více řešení se jedná o řešení z oboru přirozených či celých čísel, a žáci se tedy omezují na prezentaci výsledků pomocí výčtu prvků. To je potom může ovlivnit při řešení takových úloh, jako byla úloha 1c, kde měli žáci potíže určit všechna reálná řešení (zejména spodní hranici intervalu řešení).

Výzkum také odhalil slabinu jedné žákyně, která při vlastním označení neznámých či proměnných byla schopná úlohu správně vyřešit, ale při pokusu matematizovat vztahy pomocí písmen uvedených v zadání úspěšná nebyla. V této souvislosti se nabízí otázka, zda potíž této žákyně nesouvisí i s používanými učebními materiály. Žákyně totiž byla zvyklá pod vedením učebnice autorů Odvárko, Kadleček neznámou vždy jednotně označovat písmenem x. Z tohoto důvodu se domnívám, že není příliš vhodné volit k označení neznámé či proměnné v podobných situacích stále stejná písmena, ale je lepší označení střídat, ovšem ve smyslu výzkumu (McNeil, 2010) volit k obměně taková písmena, která žákům nepřipomínají zkratky předmětů.

Zajímavá se také v souvislosti s výzkumem (MacGregor, 1997) jeví chyba, které se dopustilo mnoho žáků, a sice že délka úsečky skládající se z úseku délky x a úseku délky 5 je rovna výrazu $x5$ nebo $5x$. V případě vyjádření délek obou částí úsečky přirozeným číslem žáci uváděli jako řešení součet délek obou úseků. V případě aritmetického schématu žáci tedy potíže nemají, v případě algebraického uvažují pravděpodobně ve smyslu, který uvádí (MacGregor, 1997), „k písmenu označujícímu velikost přidej 5“, tedy zapíší $5x$ nebo $x5$.

Přínos mé práce spatřuji v rozboru některých problémových míst v oblasti žákovského chápání algebry. Diplomovou práci tak mohou využít učitelé matematiky pro inspiraci při odhalování kritických míst v procesu učení svých žáků nebo může být využita k dalším výzkumům a ověření uvedených jevů. Zajímavé by bylo například provést šetření na větším vzorku žáků s cílem zjistit, které potíže se mezi žáky nejčastěji objevují a zda výše uvedená doporučení vedou k jejich odstranění.

Pro mou další učitelskou praxi byl nejpřínosnější kontakt se žáky a možnost s nimi blíže pohovořit nad řešením úloh. Spolu s následnou analýzou záznamů mi to umožnilo hlouběji proniknout do problémového tématu a hlavně do myšlenkových procesů žáků, což mi v budoucnu pomůže s volbou vhodných úloh a přístupů k výuce tohoto tématu.

Literatura

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 80 s.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008, 103 s.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 127 s.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia. 1*. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 112 s.

Hejný M. a kol. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání. Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha, ÚIV, 2010. Dostupné z: http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/VVV/VYUZITI-VYSLEDKU-VYZKUMU-PRO-PODPORU-SKOL-A-JEJICH/Matem-ulohy-pro-2-stupen-publikace.pdf

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, *102*(3), 625-634.

Moseley, B., & Brenner, M. E. (2009). A comparison of curricular effects on the integration of arithmetic and algebraic schemata in pre-algebra students. *Instructional Science*, *37*(1), 1-20.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2002, 80 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 84 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 95 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 71 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [1] pro 9. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 88 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 9. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 91 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 6. ročník*. Ilustrace Jiří Růžička. Brno: Nová škola, 1997, 85 s.

ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Ilustrace Jiří Růžička. Brno: Nová škola, 1998, 86 s.

ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 2010, 111 s.

ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000, 111 s.

ROSECKÁ, Zdena a Marie KOSTEČKOVÁ. *Metodický průvodce učebnicí Matematika 2 pro 2. ročník*. Brno: Nová škola, 2004, 56 s.

TOMÁŠEK, V. a kol. Výzkum TIMSS 2007. *Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha, ÚIV, 2008. [cit. 2014-06-05]. Dostupné z: http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/TIMSS/TIMSS-2007/Narodni-zprava-2007.pdf

TOMÁŠEK, V. a kol. Výzkum TIMSS 2007: *Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: ÚIV, 2009 [cit. 2014-06-05]. Dostupné z: http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreniarchiv/TIMSS/TIMSS-2007/Ulohy-z-mat-8-roc-publikace.pdf

Příloha 1 – úlohy pilotní studie

1. Soutěž o nejlepší kuchyň

Časopis *Dům a design* užívá bodový systém pro hodnocení nových kuchyní. Kuchyň s nejvyšším počtem bodů získává cenu „Kuchyň roku". Pět porotců uděluje body podle následujícího systému:

3 body: nadstandardní
2 body: standard
1 bod: pod standardem

Průměrná hodnocení pěti kuchyní od různých výrobců, podle kritérií Funkčnost, Vzhled a Bezpečnost lze vyčíst z tabulky. Hodnota Energetická náročnost uvádí index energetické spotřeby, přičemž hodnota 3,0 určuje nejvyšší energetickou spotřebu.

Kuchyň	Funkčnost (F)	Vzhled (V)	Bezpečnost (B)	Energetická náročnost (U)
K1	2,8	2,0	2,2	1,0
K2	2,6	1,8	2,6	0,4
K3	2,0	2,2	2,8	1,8
K4	2,2	3	1,8	2,8
K5	2,8	?	2,0	1,2

a) Na výpočet celkového hodnocení kuchyní časopis používá vzorec, jak je vidět níže. Doplň do prázdných políček znaménka + a – . Vysvětli svou volbu.

$$\text{celkové hodnocení} = \boxed{}(5 \cdot F)\boxed{}(0{,}8 \cdot B)\boxed{}(2{,}5 \cdot U)\boxed{}\ V$$

b) Vypočti celkové hodnocení kuchyně K1.

c) Jaké ohodnocení by musela získat v kategorii Vzhled kuchyň K5, aby byla celkově lepší než K1?

d) Výrobce kuchyně K4 nesouhlasí se způsobem, jak se určuje celkové hodnocení. Jaký jiný vzorec může navrhnout, aby se jeho kuchyň stala Kuchyní roku?

2. V bedýnce je *j* kilogramů jahod. Co znamená výraz $5j$?

3. *n* označuje jakékoli číslo. Zapiš matematicky (výrazem) větu „Přičti *n* k pěti a vynásob třemi."

4. Zuzana váží o 1 kg méně než Tomáš. Zuzana váží z kilogramů. Tomáš váží t kilogramů. Jak bys zapsal(a) matematicky, kolik váží Tomáš?

5. Čokoláda Margot stojí o 5 korun více než krabička Mega Lentilek. *x* je cena čokolády Margot, *p* vyjadřuje počet krabiček lentilek a *m* počet čokolád Margot, které si kupuješ. Vyjádři celkovou útratu.

Celková útrata =

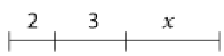
6. *x* je kladné číslo. Co znamená výraz $\frac{x}{3}$? Vyber všechny správné odpovědi.

a) číslo x vynásobené jednou třetinou
b) jedna třetina z čísla x
c) číslo x děleno jednou třetinou
d) číslo x zmenšené třikrát
e) číslo x zmenšené o jednu třetinu

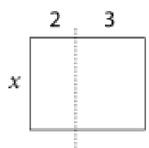
7. Která z možností je znázorněna výrazem $2x + 3x$?

A Délka této úsečky:

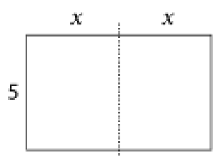
B Délka této úsečky:



C Obsah tohoto obrazce:



D Obsah tohoto obrazce:



8. Rozhodni, zda každá z následujících možností je pravdivá (zakroužkuj správnou odpověď):

Výraz $cd + 1$ znamená:

a) součin hodnot c a d zvýšený o jednu. ANO - NE

b) v každé z c zavařovacích sklenic je d okurek. Jedna okurka se do sklenic nevešla. ANO - NE

c) c zvýšené o $d + 1$. ANO - NE

d) obsah obdélníku o stranách c a $(d + 1)$. ANO - NE

e) součet c a d zvýšený o jednu. ANO - NE

9. Vyber všechny odpovědi, které odpovídají situaci vyjádřené touto rovností

$$6x - 3y = 18$$

a) Každé dítě snědlo šest koláčů a každý dospělý tři koláče, dohromady snědli 18 koláčů.

b) Petr je nešika. Z každého balení po šesti vejcích jich na cestě polovinu rozbije. Nakonec donesl domů jen 18 vajec.

c) Každě z děvčat nazdobilo 6 vajíček a každý z chlapců, kteří přišli na koledu, od nich dostal tři nazdobená vajíčka. Pro další koledníky ještě zbylo osmnáct nazdobených vajíček.

Příloha 2 – úlohy hlavní studie

1. Soutěž o nejlepší kuchyň

Časopis *Dům a design* užívá bodový systém pro hodnocení nových kuchyní. Kuchyň s nejvyšším počtem bodů získává cenu „Kuchyň roku". Pět porotců uděluje body podle následujícího systému:

3 body: nadstandardní
2 body: standard
1 bod: pod standardem

Průměrná hodnocení pěti kuchyní od různých výrobců, podle kritérií Funkčnost, Vzhled a Bezpečnost lze vyčíst z tabulky. Hodnota Energetická náročnost uvádí index energetické spotřeby, přičemž hodnota 3,0 určuje nejvyšší energetickou spotřebu.

Kuchyň	Funkčnost (F)	Vzhled (V)	Bezpečnost (B)	Energetická náročnost (U)
K1	2,8	2,0	2,2	1,0
K2	2,6	1,8	2,6	0,4
K3	2,0	2,2	2,8	1,8
K4	2,2	3	1,8	2,8
K5	2,8	?	2,0	1,2

a) Na výpočet celkového hodnocení kuchyní časopis používá vzorec, jak je vidět níže. Doplň do prázdných políček znaménka + a –, aby se podle počtu dosažených bodů dala vybrat nejlepší kuchyň. Vysvětli svou volbu.

$$\text{celkové hodnocení} = \square\ (5 \cdot F) \square\ (0{,}8 \cdot B) \square\ (2{,}5 \cdot U) \square\ V$$

b) Vypočti celkové hodnocení kuchyně K1.

c) Jaké ohodnocení by musela získat v kategorii Vzhled kuchyň K5, aby bylo celkové hodnocení K5 lepší než celkové hodnocení K1?

d) Výrobce kuchyně K4 nesouhlasí se způsobem, jak se určuje celkové hodnocení. Jaký jiný vzorec může navrhnout, aby se jeho kuchyň stala Kuchyní roku a aby zároveň vzorec odpovídal realitě (aby vypovídal o kvalitě té kuchyně)?

2. V bedýnce je *j* kilogramů jahod. Co znamená výraz $5j$?

3. *n* označuje jakékoli číslo. Zapiš matematicky (výrazem) větu „Přičti *n* k pěti a vynásob třemi."

4. Zuzana váží o 1 kg méně než Tomáš. Zuzana váží z kilogramů. Tomáš váží t kilogramů. Jak bys zapsal(a) matematicky, kolik váží Tomáš?

5. Čokoláda Margot stojí o 5 korun více než krabička Mega Lentilek. *x* je cena čokolády Margot, *p* vyjadřuje počet krabiček lentilek a *m* počet čokolád Margot, které si kupuješ. Vyjádři celkovou útratu.

Celková útrata =

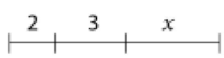
6. *x* je kladné číslo. Co znamená výraz $\frac{x}{3}$? Vyber všechny správné odpovědi.

a) číslo x vynásobené jednou třetinou
b) jedna třetina z čísla x
c) číslo x děleno jednou třetinou
d) číslo x zmenšené třikrát
e) číslo x zmenšené o jednu třetinu

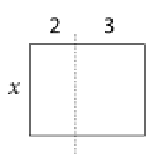
7. Která z možností je znázorněna výrazem $2x + 3x$?

(A) Délka této úsečky:

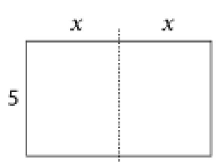
(B) Délka této úsečky:



(C) Obsah tohoto obrazce:



(D) Obsah tohoto obrazce:



8. Rozhodni, zda každá z následujících možností je pravdivá (zakroužkuj správnou odpověď):

Výraz $cd + 1$ znamená:

a) Součin hodnot c a d zvýšený o jednu. ANO - NE
b) Počet okurek celkem, když v každé z c zavařovacích sklenic je d okurek a jedna okurka se do sklenic nevešla. ANO - NE
c) c zvýšené o $d + 1$. ANO - NE
d) Obsah obdélníku o stranách c a $(d + 1)$. ANO - NE
e) Součet c a d zvýšený o jednu. ANO - NE

9. Vyber všechny odpovědi, které odpovídají situaci vyjádřené touto rovností

$$6x - 3y = 18$$

a) Každé dítě snědlo šest koláčů a každý dospělý tři koláče, dohromady snědli 18 koláčů.

b) Petr je nešika. Z každého balení po šesti vejcích jich na cestě polovinu rozbije. Nakonec donesl domů jen 18 vajec.

c) Každě z děvčat nazdobilo 6 vajíček a každý z chlapců, kteří přišli na koledu, od nich dostal tři nazdobená vajíčka. Pro další koledníky ještě zbylo osmnáct nazdobených vajíček.